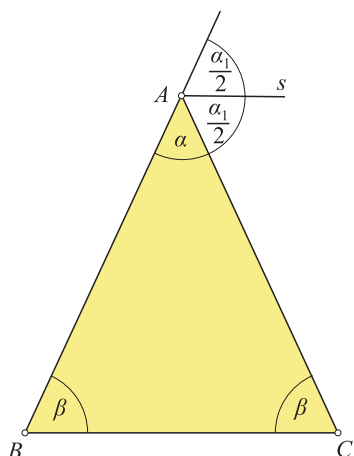


Neki teoremi za jednakokračni trokut

Daniela Zubović i
Šefket Arslanagić, Sarajevo

U ovom članku dokazat ćemo više teorema koji se odnose na jednakokračni trokut (trokut čija su dva kuta jednaka, odnosno dvije stranice sukladne). Sukladne stranice tog trokuta zovu se krakovi trokuta, a treća stranica je osnovica trokuta. Visina na osnovicu tog trokuta je ujedno simetrala osnovice, težišnica te simetrala kuta koji leži nasuprot osnovici.

Teorem 1. Simetrala vanjskog kuta koji je nasuprot osnovici jednakokračnog trokuta paralelna je njegovoj osnovici.



Slika 1.



Dokaz: Neka je s simetrala vanjskog kuta α_1 kod vrha A jednakokračnog trokuta ABC , tj. neka je:

$$\sphericalangle CA s = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Zbog $2\beta + \alpha = 180^\circ$, tj. $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ imamo

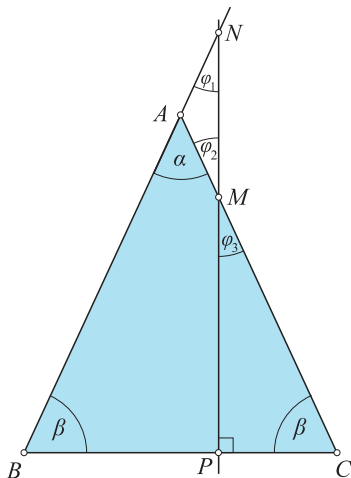
$$\frac{\alpha_1}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \beta \text{ ili } \sphericalangle CA s = \sphericalangle ACB,$$

što znači da je $s \parallel BC$, što je i trebalo dokazati. ■

Teorem 2. Pravac okomit na osnovicu $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC presijeca krak $\overline{AC}$ u točki M i produžetak kraka $\overline{AB}$ u točki N . Dobiveni trokut AMN je jednakokračan.

Dokaz: Iz pravokutnog trokuta BPN je $\varphi_1 = 90^\circ - \beta$, a iz pravokutnog trokuta CPM je $\varphi_3 = 90^\circ - \beta$, tj. $\varphi_1 = \varphi_3$ (slika 2). Budući da su veličine kutova φ_2 i φ_3 jednake (vršni kutovi), onda je

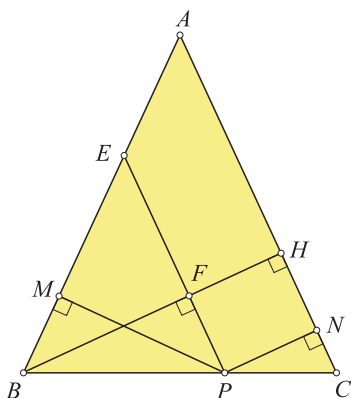
$\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ - \beta$ pa je trokut AMN jednakokraničan, što je i trebalo dokazati.



Slika 2.

Teorem 3. Zbroj duljina okomica povučenih iz bilo koje točke osnovice na krakove jednakokraničnog trokuta je konstantan.

Dokaz: Neka su PM i PN okomice iz točke $P \in \overline{BC}$ na $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ te neka je $PE \parallel AC$ (slika 3). Trokut BPE je jednakokraničan.



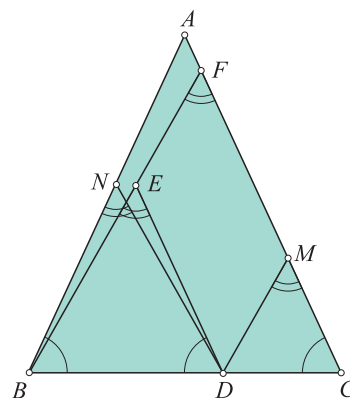
Slika 3.

Neka je $\overline{BH}$ visina iz vrha B na $\overline{AC}$ i neka je F presječna točka dužina $\overline{BH}$ i $\overline{PE}$. Iz sukladnosti trokuta BFP i BMP (jer je $|BP| = |BP|$, $\sphericalangle BMP = \sphericalangle BFP$, $\sphericalangle PBM = \sphericalangle BPF$) slijedi $|PM| = |BF|$, a iz paralelograma (pravokutnika) $PNHF$ i $|PN| = |FH|$ pa je $|PM| + |PN| = |BF| + |FH| = |BH|$, gdje je

$|BH|$ duljina visine na krak $\overline{AC}$ trokuta ABC . Ovime je teorem dokazan. ■

Teorem 4. Ako se iz bilo koje točke na osnovici jednakokraničnog trokuta povuku dužine do krakova tako da s njima zatvaraju jednake kutove, tada je zbroj duljina tih dužina konstantan.

Dokaz: Neka je D točka na osnovici $\overline{BC}$ jednakokraničnog trokuta ABC i neka je $\sphericalangle BND = \sphericalangle DMC$ te vrijedi $N \in \overline{AB}$ i $M \in \overline{AC}$ (slika 4). Neka je $DE \parallel AC$ i $BF \parallel DM$.



Slika 4.

Sad je $\triangle BDN \cong \triangle BDE$ jer je $|BD| = |BD|$, $\sphericalangle DBN = \sphericalangle EDB$ i $\sphericalangle BND = \sphericalangle BED$. Četverokut $DMFE$ je paralelogram pa je $|DM| = |EF|$. Sada je $|DM| + |DN| = |EF| + |BE| = |BF|$, gdje je $|BF|$ duljina dužine $\overline{BF}$ koja ne ovisi o položaju točke D nego samo o kutu koji dužine povučene iz D zatvaraju s krakovima trokuta. ■

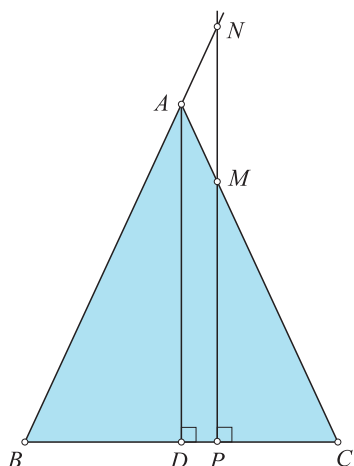
Teorem 5. Pravac okomit na osnovicu $\overline{BC}$ jednakokraničnog trokuta u bilo kojoj točki P osnovice presijeca krak $\overline{AC}$ u točki M i produžetak kraka $\overline{AB}$ u točki N . Zbroj $|PM| + |PN|$ je konstantan.

Dokaz: Primijenit ćemo sličnost trokuta. Iz $\triangle ABD \sim \triangle NBP$ pa je (slika 5):

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|PN|}{|BP|} \implies |PN| = \frac{|AD| \cdot |BP|}{|BD|}. \quad (1)$$

Također iz $\triangle ADC \sim \triangle MPC$ slijedi

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|PM|}{|PC|} \implies |PM| = \frac{|AD| \cdot |PC|}{|DC|}. \quad (2)$$



Slika 5.

Zbrajanjem jednakosti (1) i (2) dobivamo

$$\begin{aligned}
 |PM| + |PN| &= \frac{|AD| \cdot |PC|}{|DC|} + \frac{|AD| \cdot |BP|}{|BD|} \\
 &= |AD| \cdot \left(\frac{|PC|}{\frac{1}{2}|BC|} + \frac{|BP|}{\frac{1}{2}|BC|} \right) \\
 &= |AD| \cdot \frac{2(|PC| + |BP|)}{|BC|} \\
 &= |AD| \cdot \frac{2|BC|}{|BC|} = 2|AD|,
 \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. ■

Možete dokazati i sljedeće teoreme.

1. Ako je točka D polovište osnovice $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC , točka E nožište visine iz točke D na krak $\overline{AC}$ i točka F polovište dužine $\overline{DE}$, tada je $BE \perp AF$.
2. Ako se krak $\overline{BA}$ jednakokračnog trokuta ABC produži preko vrha A do točke D tako da je $|AD| = |AB|$ i točka D spoji s vrhom C , tada je kut $\angle BCD$ pravi.
3. Ako se iz bilo koje točke osnovice jednakokračnog trokuta povuku paralele s njegovim krakovima, tada dobiveni paralelogram ima konstantan opseg.
4. Na krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC izabrane su točke M i N tako da je $|BM| = |CN|$. Dokažite da polovište dužine $\overline{MN}$ leži na srednjici trokuta ABC koja je paralelna njegovoj osnovici.
5. Vrhovi osnovice jednakokračnog trokuta i presjeci simetrala kutova na osnovici s krakovima su vrhovi jednakokračnog trapeza koji ima tri stranice jednakih duljina.

LITERATURA

- 1/ E. D. Kulatin (2009.): *Geometrija trokuta u zadacima*, URSS, Moskva.
- 2/ A. Marić (1998.): *Planimetrija – Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb.

Matematički rebus

