

Sustavi simetričnih jednažbi



Aleksandra Floreani, Osijek

Sustav jednažbi je simetričan ako zamjenom oznaka bilo kojih dviju varijabli dobijemo identičan sustav. U srednjoškolskom obrazovanju simetrični sustavi se prvi puta pojavljuju prilikom rješavanja sustava linearne i kvadratne jednažbe.

Na redovnoj nastavi najčešće se metodom supstitucije rješavaju jednostavniji simetrični sustavi. Znači, jednu nepoznicu izrazimo iz linearne jednažbe i uvrstimo u kvadratnu. Sustavi dviju kvadratnih jednažbi ili sustavi u kojima je barem jedna jednažba većeg stupnja rješavaju se na dodatnoj nastavi s darovitim učenicima kojima možemo pokazati i neke druge metode. Metoda kada transformiramo sustav kako bi se u njemu pojavili izrazi $x+y$ i xy ili pak $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ i $\sqrt{xy}$ (primjer 3) te se onda primijeni supstitucija bit će pokazana u ovome članku.

Primjer 1.

Riješite sustav

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = 180. \end{cases}$$

Rješenje. Jednažbe napišemo u nešto drukčijem obliku i uvedimo supstituciju $u = x + y$ i $v = xy$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{4}$$

$$v = 4u$$

$$x^2 + y^2 = 180$$

$$u^2 - 2v = 180.$$

Polazni sustav sveli smo na sustav

$$\begin{cases} v = 4u \\ u^2 - 2v = 180. \end{cases}$$

Iz toga proizlazi $u^2 - 8u - 180 = 0$ odakle je $u_1 = 18$, $v_1 = 72$ i $u_2 = -10$, $v_2 = -40$.

Sad dobivamo dva nova sustava

$$\begin{cases} x+y=18 \\ xy=72 \end{cases} \quad \text{ i } \quad \begin{cases} x+y=-10 \\ xy=-40 \end{cases}$$

čija su rješenja ujedno i rješenja zadanog sustava jednačbi: $(6, 12)$, $(12, 6)$ i $(-5 + \sqrt{65}, -5 - \sqrt{65})$, $(-5 - \sqrt{65}, -5 + \sqrt{65})$

Primjer 2.

Riješite sustav

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 31 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Rješenje. Prvu jednačbu zapišemo nešto drukčije

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= 31 \\ x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ &\quad - 5x^4y - 10x^3y^2 - 10x^2y^3 - 5xy^4 = 31 \\ (x+y)^5 - 5xy(x^3+y^3) - 10x^2y^2(x+y) &= 31 \\ (x+y)^5 - 5xy(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2) \\ &\quad - 10x^2y^2(x+y) = 31 \\ (x+y)^5 - 5xy((x+y)^3 - 3xy(x+y)) \\ &\quad - 10x^2y^2(x+y) = 31. \end{aligned}$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvedemo supstituciju

$$u = x + y \quad \text{i} \quad v = xy.$$

Tad dobivamo

$$u^5 - 5v(u^3 - 3uv) - 10v^2u = 31.$$

Iz druge jednačbe $x + y = 1 = u$ uvrštavanjem u dobiveno slijedi

$$\begin{aligned} 1 - 5v(1 - 3v) - 10v^2 &= 31 \\ v^2 - v - 6 &= 0 \\ v_1 &= -2, \quad v_2 = 3. \end{aligned}$$

Dobili smo dva sustava

$$\begin{cases} u = x + y = 1 \\ v = xy = -2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} u = x + y = 1 \\ v = xy = 3 \end{cases}$$

koja možemo riješiti s pomoću Vièteovih formula. Naime x i y su rješenja kvadratnih jednačbi $t^2 - t - 2 = 0$ i $t^2 - t + 3 = 0$.

Konačno, rješenja su $(-1, 2)$, $(2, -1)$,

$$\left(\frac{1 + \sqrt{11}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{11}i}{2} \right) \text{ i } \left(\frac{1 - \sqrt{11}i}{2}, \frac{1 + \sqrt{11}i}{2} \right).$$

Primjer 3.

Riješite sustav

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35. \end{cases}$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ i $v = \sqrt{xy}$. Slijedi

$$\begin{aligned} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} &= 30 \\ \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) &= 30 \\ uv &= 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} &= 35 \\ (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 &= 35 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) &= 35 \\ u^3 - 3uv &= 35 \\ u^3 - 90 &= 35 \\ u &= 5 \text{ i } v = 6. \end{aligned}$$

Iz sustava

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases}$$

dobivamo rješenja $(4, 9)$ i $(9, 4)$.

Primjer 4.

Riješite sustav

$$\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $u = 64^{2x}$ i $v = 64^{2y}$. Prva jednačba sada je oblika $u + v = 12$.

Kvadriranjem druge jednačbe dobivamo $64^{2x} \cdot 64^{2y} = 32$, odnosno nakon supstitucije $uv = 32$.

Sada su u i v rješenja jednačbe $t^2 - 12t + 32 = 0$. Odnosno $u = 4$ i $v = 8$ ili $u = 8$ i $v = 4$.

Dobivamo dva sustava

$$\begin{cases} 64^{2x} = 4 \\ 64^{2y} = 8 \end{cases} \quad \text{ i } \quad \begin{cases} 64^{2x} = 8 \\ 64^{2y} = 4. \end{cases}$$

Dovoljno je riješiti samo jedan od njih (zbog simetričnosti umjesto rješavanja drugog sustava možemo samo zamijeniti x i y):

$$\begin{aligned} 64^{2x} &= 4 & 64^{2y} &= 8 \\ 4^{6x} &= 4^1 & 2^{12y} &= 2^3 \\ x &= \frac{1}{6} & y &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Drugo rješenje je $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{6}$.

Primjer 5.

Riješite sustav

$$\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5 \\ 2^{\cos x} \cdot 2^{\frac{1}{\cos y}} = 4. \end{cases}$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $u = 2^{\cos x}$ i $v = 2^{\frac{1}{\cos y}}$. Zadani sustav je sada oblika

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 4 \end{cases}$$

te su u i v rješenja jednadžbe $t^2 - 5t + 4 = 0$. Dakle, $u = 4$ i $v = 1$ ili $u = 1$ i $v = 4$.

No, slučaj $u = 4$ i $v = 1$ nije rješenje zbog $2^{\cos x} = 4 \implies \cos x = 2$ što nije moguće.

Stoga rješenja dobivamo za $u = 1$ i $v = 4$:

$$\begin{aligned} 2^{\cos x} &= 1 & 2^{\frac{1}{\cos y}} &= 4 \\ \cos x &= 0 & \frac{1}{\cos y} &= 2 \\ x &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} & \cos y &= \frac{1}{2} \\ & & y &= \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Osim sustava simetričnih jednadžbi ovom metodom mogu se riješiti i neke složenije jednadžbe.

Primjer 6.

Riješite jednadžbu $x^4 + (1-x)^4 = 1$.

Rješenje. Uvedemo supstituciju $u = x$ i $v = 1 - x$.

Vidimo da vrijedi

$$u + v = x + 1 - x = 1.$$

Polazna jednadžba je

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= 1 \\ u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4 &= 1 \\ -4u^3v - 6u^2v^2 - 4uv^3 &= 1 \\ (u+v)^4 - 4uv(u^2 + v^2) - 6(uv)^2 &= 1 \\ (u+v)^4 - 4uv((u+v)^2 - 2uv) - 6(uv)^2 &= 1 \\ 1 - 4uv(1 - 2uv) - 6(uv)^2 &= 1 \\ (uv)^2 - 2uv &= 0. \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi $uv = 2$ ili $uv = 0$.

Iz toga dobivamo dva nova sustava jednadžbi

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 2 \end{cases} \quad \text{ i } \quad \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 0. \end{cases}$$

Iz prvog sustava slijedi $u_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, a iz drugog $u_3 = 1$ i $u_4 = 0$. Budući da je $x = u$ ovo su ujedno i rješenja zadane jednadžbe.

Primjer 7.

Riješite jednadžbu $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$.

Rješenje. Uvedimo supstituciju $u = \sqrt[3]{x+7}$ i $v = \sqrt[3]{28-x}$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu imamo

$$u + v = 5.$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= (x+7) + (28-x) = 35 \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u^2v - 3uv^2 &= 35 \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) &= 35 \\ 125 - 15uv &= 35 \\ uv &= 6. \end{aligned}$$

Sad dobivamo sustav

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6. \end{cases}$$

Rješenja tog sustava su $u_1 = 2$ i $v_1 = 3$ te $u_2 = 3$ i $v_2 = 2$.

U prvom slučaju iz $u_1 = 2$ dobivamo $\sqrt[3]{x+7} = 2$, odnosno $x + 7 = 8$ pa je $x_1 = 1$.

U drugom slučaju iz $u_2 = 3$ dobivamo $\sqrt[3]{x+7} = 3$, odnosno $x + 7 = 28$ pa je $x_2 = 20$.

Primjer 8.

Riješite jednadžbu $\sqrt[3]{(2-x)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = 3$.

Rješenje. Uvedimo supstituciju $u = \sqrt[3]{2-x}$ i $v = \sqrt[3]{7+x}$. Polazna jednadžba tad glasi

$$u^2 - uv + v^2 = 3.$$

Također je

$$u^3 + v^3 = 9$$

$$(u+v)(u^2 - uv + v^2) = 9$$

$$u + v = 3$$

$$u^2 + 2uv + v^2 = 9.$$

Oduzmemo li od ovako dobivene jednadžbe $u^2 + 2uv + v^2 = 9$ polaznu $u^2 - uv + v^2 = 3$, slijedi $3uv = 6$, odnosno $uv = 2$.

Možemo napisati sustav jednadžbi

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2. \end{cases}$$

Taj sustav ima dva rješenja: $u_1 = 2$ i $v_1 = 1$ te $u_2 = 1$ i $v_2 = 2$.

U prvom slučaju iz $u_1 = 2$ dobivamo $\sqrt[3]{2-x} = 2$, odnosno $2 - x = 8$ pa je $x_1 = -6$.

U drugom slučaju iz $u_1 = 1$ dobivamo $\sqrt[3]{2-x} = 1$, odnosno $2 - x = 1$ pa je $x_2 = 1$.

LITERATURA

1/ B. Pavković, B. Dakić (1988.): *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb.

2/ I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić (2020.): *Matematika 2, 1. dio, udžbenik matematike, 5 i 6 sati tjedno*, Školska knjiga, Zagreb.

3/ B. Dakić, N. Elezović (1998.): *Matematika 3 – trigonometrija*, Element, Zagreb.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ne učiš} = \text{padneš ispit} \\ \text{učiš} = \text{ne padneš ispit} \end{array} \right\} +$$

$$\begin{array}{l} \text{ne učiš} + \text{učiš} = \text{padneš ispit} + \text{ne padneš ispit} \\ \text{(ne + 1) učiš} = \text{(1 + ne) padneš ispit} \quad / : (\text{ne} + 1) \\ \hline \text{učiš} = \text{padneš ispit} \end{array}$$

matematika je uvijek u pravu :-)