

Vizualizacija matematičke indukcije



Marijana Špoljarić i
Marko Marić, Virovitica

Matematička indukcija je svojstvo skupa prirodnih brojeva. Utemeljena je na načelu da podskup skupa prirodnih brojeva koji sadrži broj 1 i ima svojstvo da ako sadrži prirodni broj n , sadrži i njegov neposredni sljedbenik $n + 1$, onda je taj podskup jednak skupu prirodnih brojeva. Jedan od načina na koji se matematička indukcija može približiti učenicima jest vizualizacija. Metoda matematičke indukcije prikazat će se vizualnim primjerima.

Uvod

Matematička indukcija omogućava dokaze određenih pravila, formula ili tvrdnji koje se smatraju istinitim za sve prirodne brojeve. Ta se metoda temelji se na **Peanovu aksiomu** koji glasi:

Ako je M podskup od $\mathbb{N}$ i ako vrijedi:

- (i) $1 \in M$,
- (ii) $(\forall n \in \mathbb{N}) (n \in M \Rightarrow n + 1 \in M)$,

onda je $M = \mathbb{N}$.

Posljedica Peanova aksioma je metoda matematičke indukcije koja se izvodi u dva koraka. Prvi korak je osnovni korak ili baza u kojem se pokazuje

valjanost tvrdnje za određenu početnu vrijednost. Potom slijedi drugi korak, "korak indukcije", u kojem se na temelju pretpostavke da tvrdnja vrijedi za proizvoljni prirodni broj pokazuje kako ona vrijedi i za njegov neposredni sljedbenik.

Pretpostavimo da za tvrdnju $T(n)$ (koja ovisi o prirodnom broju n) vrijedi:

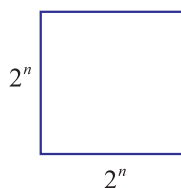
- (i) tvrdnja $T(1)$ je istinita
- (ii) iz istinitosti tvrdnje $T(n)$ proizlazi istinitost tvrdnje $T(n + 1)$ za $n \in \mathbb{N}$.

Tada je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj n .

Vizualizacija matematičke indukcije

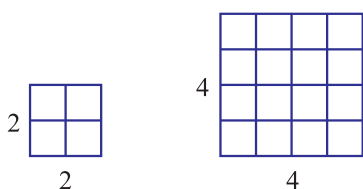
Kako bismo što bolje shvatili metodu matematičke indukcije, poslužit ćemo se vizualnim primjerima.

Primjer 1. Pretpostavimo da imamo kvadrate duljine stranice $a = 2^n$ (slika 1).



Slika 1. Kvadrat duljine stranice 2^n

To su kvadrati kojima je duljina stranice 2, 4, 8, 16... U svaki od kvadrata ucrtamo jediničnu kvadratnu mrežu (slika 2).



Slika 2. Kvadratna mreža

Može li se svaki kvadrat duljine stranice 2^n prekriti pločicama u obliku slova L (slika 3) tako da neprekriveno ostane točno jedno, proizvoljno odabrano polje [3]?



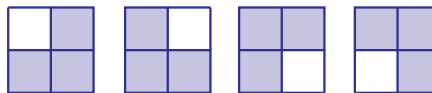
Slika 3. L-oblik

Rješenje.

Opisano popločavanje postoji za svaki prirodan broj n , odnosno, za bilo koje odabrano polje mreže dimenzije $2^n \times 2^n$ sva ostala polja mogu se prekriti L-oblicima. Dokažimo to.

Baza. Za $n = 1$ treba pokazati da postoji popločavanje kvadrata duljine stranice $a = 2^1 = 2$.

Popločavanjem L-oblicima dobit ćemo jedan od ova četiri slučaja:



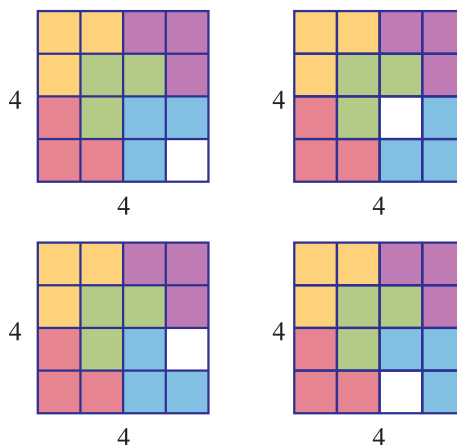
Slika 4. Popločavanje kvadrata duljine stranice 2^n L-oblicima za $n = 1$

Prema slici 4 vidljivo je da u kvadratu duljine stranice 2 možemo odabrati bilo koji kvadrat duljine stranice 1 unutar njega i ostaviti ga nepokrivenim (slika 4).

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za proizvoljan prirodni broj n , tj. kvadrat duljine stranice 2^n može se popločiti L-oblicima na način da jedan, bilo koji kvadrat ostane prazan.

Korak indukcije. S pomoću navedene pretpostavke treba pokazati da tvrdnja vrijedi i za kvadrate duljine stranice 2^{n+1} .

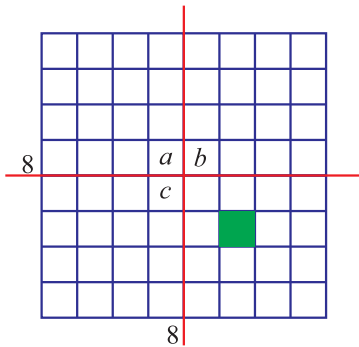
Vizualizirajmo kako bi taj korak izgledao pri prelasku s $n = 2$ na $n = 3$. Dakle, pretpostavimo da se kvadrat duljine stranice 2^2 može popločiti L-oblicima tako da ostane prazan, tj. nepopločen jedan kvadratić dimenzije 1×1 . Na slici 5 prikazana su četiri načina popločavanja kvadrata duljine stranice $2^2 = 4$.



Slika 5. Popločavanje kvadrata duljine stranice 2^n L-oblicima različitih boja za $n = 2$

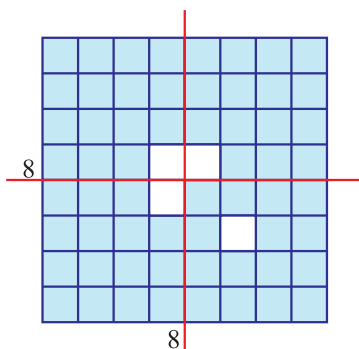
Vizualno prikažimo jednu moguću situaciju za $n = 3$, tj. za kvadrat duljine stranice 8. Odaberimo po

volji jedan kvadratić unutar kvadratne mreže koji nećemo popločiti (na slici 6 obojen je zelenom bojom) i podijelimo kvadrat duljine stranice 8 na 4 kvadrata duljine stranice 4.

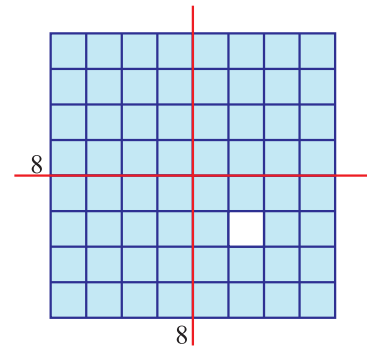


Slika 6. Kvadrat duljine stranice 8

Na toj slici označimo tri središnja kvadratića slovima a , b i c . Gornji lijevi kvadrat duljine stranice 4 može se (po pretpostavci indukcije za $n = 2$) popločiti L-oblicima tako da nepokriven ostane kvadratić a . Gornji desni kvadrat duljine stranice 4 može se popločiti L-oblicima tako da ostane nepokriven kvadratić s oznakom b . Donji se lijevi kvadrat prema pretpostavci indukcije može popločiti tako da nepokriven ostane kvadratić c . I konačno, donji desni kvadrat duljine stranice 4 može se po pretpostavci indukcije popločiti tako da nepokriven ostane baš onaj zeleni kvadratić. Tri neobojena polja s oznakama a , b i c čine L-oblik (slika 7) i oni se mogu popločiti L-oblikom (slika 8). Dakle, preostalo je nepopločeno samo polje označeno zelenom bojom.



Slika 7. Tri neobojena polja čine jedan L-oblik



Slika 8. Kvadrat duljine stranice 8 popločen L-oblicima

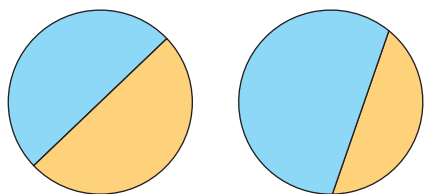
Na ovaj smo način pokazali sljedeće: ako se kvadrat sa stranicom duljine $2^2 = 4$ može popločiti L-oblicima tako da jedan kvadratić ostane nepopločen, tada se i kvadrat sa stranicom duljine $2^3 = 8$ može popločiti L-oblicima tako da ostane jedan kvadratić nepopločen.

Jasno je da se analogan postupak može provesti za bilo koji n . Kvadrat sa stranicom duljine 2^{n+1} podijeli se na 4 kvadrata sa stranicama duljine 2^n , u svakom od tih manjih kvadrata iskoristi se pretpostavka indukcije (za kvadrat sa stranicom duljine 2^n) i to tako da se u trima od njih popločavanje izvrši tako da 3 nepopločana kvadratića čine jedan L-oblik u sredini, a četvrti kvadrat, a to je baš onaj u kojem smo izabrali zeleni kvadratić, po pretpostavci indukcije opet možemo popločiti tako da ostane nepokriven taj zeleni kvadratić. Tada metodom matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki n .

Primjer 2. Dokažite da se krug podijeljen proizvoljnim brojem tetiva na likove može obojiti dvjema bojama na način da likovi sa zajedničkim stranicama (susjedni likovi) budu obojeni različitim bojama [3].

Rješenje.

Baza. Podijelimo krug jednom (bilo kojom) tetivom, $n = 1$. Na taj smo način podijelili krug na dva odsjeka koja možemo obojiti dvjema različitim bojama (slika 9).

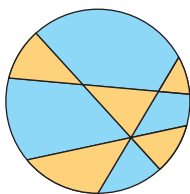


Slika 9. Krug podijeljen jednom tetivom

Pokazali smo da se odsječci koji imaju zajedničku stranicu mogu obojiti dvjema različitim bojama.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n tetiva. Krug podijeljen s n tetiva može se obojiti dvjema bojama na način da likovi sa zajedničkim stranicama budu različito obojeni.

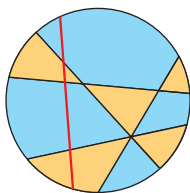
Na slici 10 prikazana je jedna od mogućih podjela kruga s četiri tetive.



Slika 10. Krug podijeljen s četiri tetive

Korak indukcije. Dokažimo da tvrdnja vrijedi i dodamo li još jednu tetivu, odnosno da vrijedi za $n + 1$ tetiva. Dodavanjem jedne tetive likovi s njezine lijeve strane bit će nakon podjele obojeni istom bojom kao likovi uz tetivu s njezine desne strane, a dijele istu stranicu. Zamjenom boja likovima s lijeve strane tetive dokazat ćemo tvrdnju.

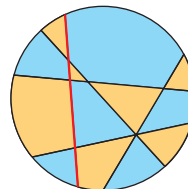
Prikažimo postupak za $n = 5$. Tetiva crvene boje koju smo nacrtali naknadno dijeli krug na dva dijela (slika 11).



Slika 11. Krug podijeljen s pet tetiva

Primijetimo da su dodavanjem crvene tetive sada likovi s lijeve strane tetive obojeni istom bojom kao likovi uz tetivu s njezine desne strane, a dijele zajedničku stranicu. Ako likovima s lijeve strane tetive

zamijenimo boje: plavu u narančastu, a narančastu u plavu, dobit ćemo likove obojene na način da susjedni likovi nisu iste boje.



Slika 12. Krug podijeljen s pet tetiva, obojen na traženi način

Vizualizacija zadatka s prebrojavanjem

Pri rješavanju zadataka s prebrojavanjem primjenjuje se **Fubinijevo načelo** koje kaže da se prebrojavanjem predmeta (ili objekata) nekog konačnog skupa na dva različita načina dobiva isti rezultat [1].

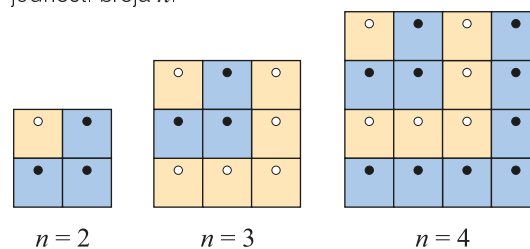
Primjer 3. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Rješenje.

Formulu koju želimo pokazati možemo vizualizirati na način da se $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ jediničnih kvadratića može presložiti u kvadrat stranice duljine n čija je površina n^2 . Radi lakšeg prebrojavanja kvadratića u svaki od njih upisat ćemo točkicu, a kako se radi o jediničnim kvadratićima, broj točkica odgovarat će ukupnoj površini kvadrata.

Vizualiziramo najprije formulu za prvih nekoliko vrijednosti broja n .

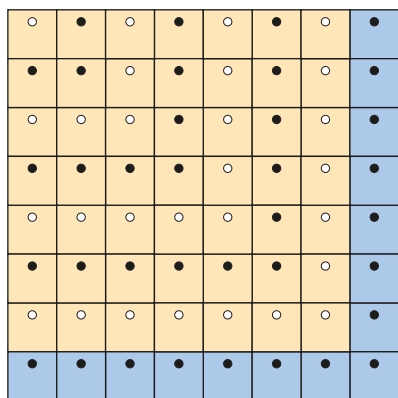


$$1 + 3 = 2^2 \quad 1 + 3 + 5 = 3^2 \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Slika 13. Slike za $n = 2, 3, 4$

Uočimo da smo do jednakosti sa slika mogli doći i primjenom Fubinijeva načela. Izraz na lijevoj strani odgovara broju točkica koje prebrojavamo po L-oblicima, a s desne se nalazi umnožak broja redaka i broja stupaca ("površina kvadrata").

Kako se iz slike za $n = 2$ stvara slika za $n = 3$? Kvadrat 2×2 nadogradimo s desne strane L-oblikom koji ima $2 \cdot 3 - 1$ kvadratića u kvadrat 3×3 . U sljedećem koraku kvadrat 3×3 nadogradimo s desne strane L-oblikom koji ima $2 \cdot 4 - 1$ kvadratića do kvadrata 4×4 . Ovaj postupak daje ideju kako napraviti prijelaz s n na $n + 1$.



Slika 14. Nadogradnja kvadrata 7×7 L-oblikom s $2 \cdot 8 - 1$ kvadratićem

U ovom slučaju pretpostavku indukcije nećemo formulirati na "standardan" način, tj. "pretpostavimo da vrijedi formula", već na sljedeći.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da se $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ jediničnih kvadratića može presložiti u kvadrat stranice duljine n .

Korak indukcije. Potrebno je $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$ jediničnih kvadratića presložiti u kvadrat stranice duljine $n + 1$. Najprije prema pretpostavci indukcije $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ kvadratića složimo u kvadrat stranice duljine n , a preostalih $2n + 1$ kvadratića posložimo ispod zadnjeg retka i iza zadnjeg stupca, tj. nadogradimo kvadrat $n \times n$ L-oblikom do kvadrata $(n + 1) \times (n + 1)$ kao na slici 14.

Primjena matematičke indukcije u svakodnevnom životu

Iako se u životu često koristimo induktivnim zaključivanjem, najčešće nismo ni svjesni da je to-me tako. Ovdje ćemo prikazati nekoliko primjera iz svakodnevnice.

Primjer 4. Dijete blatnjava čela [2].

Na igralištu se igra n djece, a među njima njih k ima blata na čelu ($1 \leq k \leq n$). Svako dijete ne zna ima li blatnjavo čelo, ali vidi čela druge djece. Djeci je rečeno da podignu ruku ako misle da imaju blata na čelu (uz pretpostavku da međusobno ne komuniciraju). Tvrdimo da nakon prvih $k - 1$ prozivanja nitko neće podignuti ruku, a nakon k -tog prozivanja će sva djeca blatnjava čela podići ruku.

Ova se tvrdnja dokazuje primjenom metode matematičke indukcije po broju k , tj. po broju djece blatnjava čela.

Baza indukcije. Pretpostavimo da samo jedno dijete, na primjer Ana, ima blata na čelu. Budući da Ana vidi da sva ostala djeca imaju čista čela i zna da barem jedno dijete mora imati blatnjavo čelo, zaključuje da ona sigurno ima blata na čelu i podiže ruku nakon prvog prozivanja.

Objasnilo što se događa na primjeru kada točno dvoje djece imaju blatnjavo čelo, na primjer Ana i Benjamin. Ana vidi da Benjamin ima blata na čelu, ali ne zna ima li ona sama blata na čelu pa ne podiže ruku nakon prvog prozivanja. Benjamin razmišlja analogno te ni on ne podiže ruku nakon prvog prozivanja. Nakon toga Ana zaključuje da upravo ona mora imati blatnjavo čelo jer je Benjamin vidio njezino blatnjavo čelo zbog kojeg nije podigao ruku nakon prvog prozivanja. Na isti način razmišlja i Benjamin. Nakon drugog prozivanja, Ana i Benjamin podižu ruku.

Pretpostavka indukcije. Ako $m < k$ djece ima blata na čelu, oni podižu ruku nakon m -tog prozivanja.

Korak indukcije. Pretpostavimo da k djece (a među njima je na primjer i Ana) ima blata na čelu. Ana koja ima blata na čelu vidi ostalo $k - 1$ dijete s blatom na čelu i zna da će, ako ona nema blata na čelu, ta djeca podići ruku nakon $k - 1$ prozivanja prema pretpostavci indukcije. Kad se to ne dogodi, Ana zaključuje da ima blata na čelu. Posve analogno zaključuju i sva ostala djeca blatnjava čela te nakon k -tog prozivanja sva djeca blatnjava čela podižu ruku.

Primjer 5. Induktivno zaključivanje

U vinskom podrumu dobili ste zadatak provjeriti kvalitetu vina u 10 000 bačva i trijezni izvijestiti vlasnika u narednih 15 minuta o rezultatima testiranja kvalitete. Naravno, to je jedino moguće indukcijom. Kako to postići?

Isprobajte kvalitetu u prvih nekoliko bačva vina i kada se uvjerite da je vino iste kvalitete, onda nasumično odaberete neku bačvu i pretpostavite da je vino iste kvalitete kao iz ovih što ste isprobali. Nakon toga, ako pokažete da je iz sljedeće bačve vino iste kvalitete, onda je problem riješen te možete vlasnika izvijestiti o rezultatima testiranja, a da se pritom niste napili.

Ovaj primjer nije riješen s pomoću metode matematičke indukcije već se radi o induktivnom zaključivanju, odnosno o nepotpunoj indukciji. Na-

ime, istinitost tvrdnje ispitana je na konačnom broju slučajeva, no ta tvrdnja ne mora vrijediti za sve slučajeve. Induktivno zaključivanje često je u eksperimentalnim znanostima.

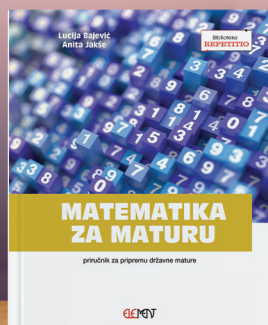
Zaključak

Primjeri koje je moguće vizualizirati uvelike mogu pomoći studentima u shvaćanju metode matematičke indukcije i njezine primjene. Opisani primjeri jedan su od načina kako približiti metodu matematičke indukcije i može ih se upotrijebiti kao motivaciju pri samoj obradi teme ili u obliku projekata.

LITERATURA

- 1/ C. Alsina, R. B. Nelsen (2006.): *Math Made Visual Creating Images for Understanding Mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington.
- 1/ D. S. Gunderson (2011.): *Handbook of mathematical induction, theory and applications*, Chapman & Hall Group, NW.
- 3/ B. Hrnjica (1996.): *Matematika – odabrana poglavlja*, reprint 2010., Bihać
<http://www.scribd.com/doc/45886173/0dabrana-Poglavlja-iz-Matematike>
- 4/ <https://www.youtube.com/watch?v=5Hn8vUE3cBQ>

Priručnici za pripremu državne mature



Biblioteka
REPETITIO

element.hr