# Pitagorine četvorke

*Branimir Dakić, Zagreb*

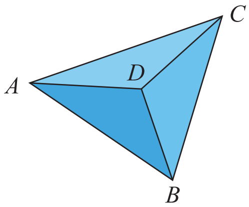
Pitagorin poučak izriče činjenicu da za duljine stranica svakog pravokutnog trokuta vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$ pri čemu je $c$ duljina hipotenuze, najdulje od triju stranica. Postoje li takvi pravokutni trokuti kojima su duljine svih triju stranica prirodni brojevi? Drugim riječima, ima li kvadratna jednadžba $a^2 + b^2 = c^2$ rješenja u skupu prirodnih brojeva? Odgovor je: Ne samo da ima već je takvih rješenja beskonačno mnogo.

Sva primitivna rješenja, ona kod kojih je $M(a,b) = M(a,c) = M(b,c) = 1$ su trojke

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

gdje su $m$ i $n$ bilo koji prirodni brojevi i $m > n$. Iz neke primitivne Pitagorine trojke $(a,b,c)$ generira se beskonačno mnogo rješenja koja su oblika $(ka, kb, kc)$ gdje je $k$ bilo koji prirodni broj. Geometrijskim okom gledano, jednom Pitagorinom trojkom određeno je beskonačno mnogo sličnih pravokutnih trokuta. Poopćenjem vezanim za jednadžbu $a^2 + b^2 = c^2$ u smislu: ima li jednadžba $a^n + b^n = c^n$, gdje je $n$ prirodni broj veći od 2, rješenja u skupu prirodnih brojeva bavi se čuveni Fermatov poučak. Odgovor je niječan, a nakon što je stoljećima pitanje bilo otvoreno, odgovor je na njega dao britanski matematičar Andrew Wiles godine 1994.

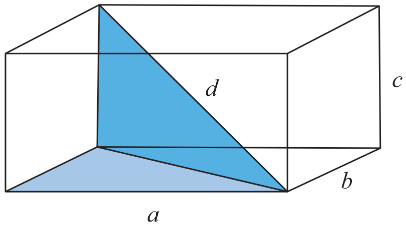
U matematici je prirodno uvriježeno postavljati pitanja poopćenja neke tvrdnje, pa isto vrijedi i za moguća poopćenja Pitagorina poučka. Jedan lijep primjer vezan je za geometrijsko poopćenje, a pitanje glasi: Postoji li tvrdnja analogna Pitagorinu poučku u euklidskom trodimenzionalnom prostoru? Odgovor je potvrdan. Promotrimo tetraedar kojemu su tri strane pravokutni trokuti $ABD$, $BCD$ i $CAD$ s pravim kutovima pri vrhu $D$. Ako je $P$ površina četvrte strane a $P_1$, $P_2$ i $P_3$ površine triju pravokutnih strana, tada vrijedi jednakost




$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2.$$

Drugi često navođen primjer poopćenja Pitagorina poučka vezan je za prostornu dijagonalu kvadra: Ako su $a$, $b$ i $c$ duljine bridova kvadra, $d$ duljina njegove prostorne dijagonale, tada je

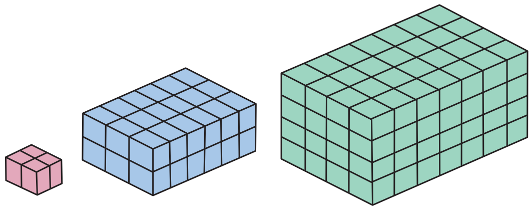
$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$



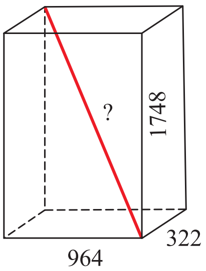

I sada se nameće pitanje: Postoje li kvadri kojima su duljine svih triju bridova i duljina prostorne di-

Branimir Dakić, prof., Zagreb, dakicb@gmail.com

jagonale prirodni brojevi? Drugim riječima, ima li diofantska jednadžba $a^2+b^2+c^2=d^2$ rješenja u skupu prirodnih brojeva? Odgovor je potvrdan, da, postoji i to ne samo jedno, već beskonačno mnogo njih. Neke je relativno lako pronaći. Primjerice: $(1,2,2,3)$, $(2,3,6,7)$, $(4,4,7,9)$, $(1,4,8,9)$.



Zanimljvo je rješenje na slici desno. Zbog čega? Izračunajte ga pa će stići odgovor. Tablica na dnu stranice navodi nekoliko rješenja.




Rješenja jednadžbe $a^2+b^2+c^2=d^2$ nazivamo **Pitagorine četvorke**. Pitagorine četvorke kojima je najveća zajednička mjera jednaka $1$, zovu se primitivnim. Skup primitivnih četvorki kojima je $a$ neparan broj dobivaju se iz formula

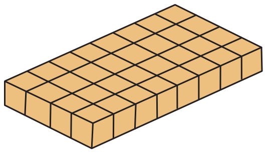
$$a=m^2+n^2-p^2-q^2, \quad b=2(mq+np),$$
$$c=2(nq-mp), \quad d=m^2+n^2+p^2+q^2$$

pri čemu su $m$, $n$, $p$ i $q$ relativno prosti prirodni brojevi te je $m+n+p+q$ neparan. Za takve četvorke vrijedi identitet

$$(m^2+n^2+p^2+q^2)^2=(2mq+2np)^2 + (2nq-2mp)^2+(m^2+n^2-p^2-q^2)^2.$$

Uz opisane probleme neizravno, ali ipak blisko, vezano je još jedno pitanje: Postoje li kvadri čiji su svi bridovi i sve dijagonale strana prirodni brojevi? Ili, prevedeno na jezik algebre, postoji li u skupu prirodnih brojeva rješenje sustava jednadžbi

$$a^2+b^2=d^2$$
$$b^2+c^2=e^2$$
$$c^2+a^2=f^2.$$



Evo primjera koji svjedoče da je odgovor pozitivan: $a=44$, $b=117$, $c=240$, $d=125$, $e=244$, $f=267$. Dapače, sustav ima beskonačno mnogo rješenja i ona se zovu **Eulerove opeke**. Najmanja Eulerova opeka upravo je navedena, a otkrio ju je Paul Halcke[1] 1719. godine.

Beskonačno mnogo Eulerovih opeka može se dobiti iz **Saundersonovih formula**[2]. Neka je $(u,v,w)$ Pitagorina trojka $(u^2+v^2=w^2)$. Tad bridovi $a$, $b$ i $c$

$$a=u|4v^2-w^2|,\ b=v|4u^2-w^2|,\ c=4uvw$$

daju dijagonale strana

$$d=w^3, \quad e=u|4v^2+w^2|, \quad f=v|4u^2+w^2|.$$

No priči nije kraj. **Savršena Eulerova opeka** je Eulerova opeka kojoj je i prostorna dijagonala prirodni broj. Gornjem sustavu jednadžbi valja pridodati i jednadžbu $a^2+b^2+c^2=g^2$, gdje je $g$ duljina prostorne dijagonale kvadra.

Još uvijek nije pronađen niti jedan primjer savršene Eulerove opeke, niti je dokazano da takva postoji. Računalno potpomognuta pretraživanja pokazuju da bi za savršenu Eulerovu opeku najmanji brid morao biti veći od $5\cdot 10^{11}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1,2,2,3)$ | $(2,6,9,11)$ | $(2,10,11,15)$ | $(6,6,17,19)$ | $(4,13,16,21)$ | $(6,13,18,23)$ | $(2,10,25,27)$ |
| $(2,3,6,7)$ | $(6,6,7,11)$ | $(1,12,12,17)$ | $(6,10,15,19)$ | $(8,11,16,21)$ | $(9,12,20,25)$ | $(2,14,23,27)$ |
| $(1,4,8,9)$ | $(3,4,12,13)$ | $(8,9,12,17)$ | $(4,5,20,21)$ | $(3,6,22,23)$ | $(12,15,16,25)$ | $(7,14,22,27)$ |
| $(4,4,7,9)$ | $(2,5,14,15)$ | $(1,6,18,19)$ | $(4,8,19,21)$ | $(3,14,18,23)$ | $(2,7,26,27)$ | $(10,10,23,27)$ |

[1] Paul Halcke (1662. – 1731.), njemački matematičar

[2] Nicholas Saunderson, (1682. – 1739.) britanski matematičar