

Geografski koordinatni sustav, 2. dio



Franka Miriam Brueckler,
Zagreb

U prošlom broju bavili smo se prvom od dviju geografskih koordinata, geografskom širinom, a sad je na redu druga, tj. geografska dužina.

Za one koji nisu pročitali prethodni nastavak ili ga nemaju pri ruci, istaknimo prvo par bitnih stvari koje su nam potrebne i za ovaj nastavak. U različitim se razredima predmetne nastave učenici upoznaju s pravokutnim koordinatnim sustavom, a u 8. razredu upoznaju se i s drugim tipom dvodimenzionalnog koordinatnog sustava – geografskim koordinatnim sustavom. Dakle, korelacije između geografije i matematike na ovu temu možemo razvijati od 8. razreda osnovne škole nadalje. S matematičke se strane geografske koordinate, geografska širina i dužina, temelje na **sfernim koordinatama**, odnosno mogu se interpretirati kao dvije od triju sfernih koordinata. Pritom je u pozadini neprecizni, ali dostatni, model Zemlje kao kugle, odnosno Zemljine površine kao sfere. Stoga je povezivanje matematičkog i geografskog koordinatnog sustava posebno prikladno u 2. razredu srednjih škola, kad se na matematici obrađuje gradivo o geometriji kugle.

Prva sferna koordinata, udaljenost od ishodišta r , ne treba nam u ovoj priči jer ako kao ishodište O uzmemo središte Zemlje, sve točke na Zemljinoj površini imaju isti $r = R^1$. Druga sferna koordinata je polarna udaljenost θ , koja je – kako smo vidjeli u prethodnom nastavku – direktno povezana s geografskom širinom. Preostala nam je treća – **azimut**, obično označen s φ ,² koji je pak u svojoj biti isto što i geografska dužina. Dok je geografska širina, odnosno polarna udaljenost, mjera odmaka od ravnine ekvatora, **geografska dužina** (oznaka λ), odnosno azimut φ , mjera je zaokreta oko Zemljina promjera $\overline{NS}$ na kojem leži os rotacije Zemlje. Drugim riječima, geografska dužina opisuje pomak u smjeru istok–zapad u odnosu na odabranu referentnu poziciju.

Budući da gledamo okret oko Zemljine osi $\overline{NS}$, za matematičku analizu geografske dužine prikladan

doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler, Zavod za matematičku analizu, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, brueckler@math.hr

¹ R je ovdje prosječni polumjer Zemlje, vidi <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>.

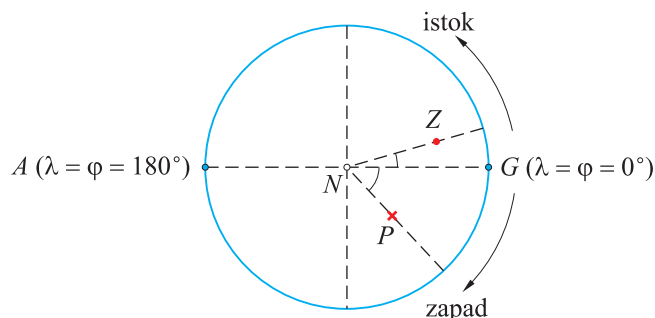
² Često se upotrebljava i veliko slovo Φ , no budući da se u geografiji to slovo upotrebljava kao oznaka geografske širine, dajemo prednost malom slovu φ .

³ Podsjećamo, u geometriji sfere velika (polu)kružnica je svaka (polu)kružnica na sferi koja s njom ima zajedničko središte.

je pogled odozgo (alternativno odozdo) na kuglu koja je model Zemlje (slika 1). Sve točke na Zemljinoj površini (točnije, na sfernom modelu) koje leže na istoj velikoj polukružnici promjera $\overline{NS}$ čine jedan **meridijan**.³ Jedan meridijan bira se kao referentni, početni. Sve točke na njemu po definiciji imaju geografsku dužinu 0° . Prema današnjem službenom standardu, početni meridijan više nije meridijan koji prolazi kroz zvjezdarnicu Greenwich (blizu Londona, Ujedinjeno Kraljevstvo), nego **međunarodni referentni meridijan** (IRM), čiju poziciju određuje *International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS). Taj meridijan prolazi vrlo blizu zvjezdarnice Greenwich (samo $5.31''$ istočno od nje), pa smo na slici 1 poziciju koja je na njegovom meridijanu i ujedno na ekvatoru (dakle, poziciju s 0° geografske širine i 0° geografske dužine) označili točkom G .

Dok se azimut od odabranog referentnog meridijana gleda u smjeru obrnutom od kazaljke na satu u rasponu punog kruga, dakle φ ima raspon od 0° do 360° , u geografiji se zbog razlikovanja smjerova istoka i zapada geografska dužina λ gleda u oba smjera u rasponu od 0° do 180° . Dakle, geografsku dužinu $\lambda = 180^\circ$ (bilo istočne bilo zapadne geografske dužine) i ujedno azimut $\varphi = 180^\circ$ imaju točke na istoj velikoj kružnici kroz sjeverni i južni pol kao točka G , ali se nalaze na njoj nasuprotnoj velikoj polukružnici. Jedna lokacija A na tom meridijanu nalazi se točno antipodno od točke G (slika 1).

Dogovorimo sljedeću konvenciju: Ako je pozicija iznad ekvatora ili na njemu, označavamo ju punim kružićem $\bullet$, a ako je južno, križićem $\times$.⁴ Uz tu konvenciju na slici 1 imamo još dvije pozicije, Z (Zagreb) i P (Sao Paolo, Brazil) kako bismo dalje objasnili razliku istočne i zapadne geografske dužine i vezu između λ i φ . Zagreb se nalazi (za manje od 180°) istočno od Greenwicha, stoga kažemo da Zagreb ima istočnu geografsku dužinu (oznaka E). Za razliku od njega, Sao Paolo je za manje od 180° zapadno od Gre-



Slika 1. Pogled "odozgo" na Zemljinu kuglu

enwicha, pa kažemo da ima zapadnu geografsku dužinu (oznaka W). Sam iznos geografske dužine od Z , odnosno P mjera je kuta $\sphericalangle GNZ$, odnosno $\sphericalangle GNP$. Za Zagreb na internetu lako nalazimo podatak da je $\lambda_Z = \sphericalangle GNZ = 15^\circ 58' 40''$ E, a za Sao Paolo je odgovarajuća geografska dužina $\lambda_P = \sphericalangle GNP = 46^\circ 38' 25''$ W.

A što je s azimutom? Za istočne geografske dužine je azimut isto što i geografska dužina: $\varphi = \lambda$ za $0^\circ \leq \lambda/E \leq 180^\circ$.⁵ Primjerice, za Zagreb su i azimut i geografska dužina iznosa $15^\circ 58' 40''$. Za zapadne geografske dužine azimut je razlika geografske dužine do 360° : $\varphi = 360^\circ - \lambda$ za $0^\circ \leq \lambda/W \leq 180^\circ$. Primjerice, za Sao Paolo je azimut $360^\circ - 46^\circ 38' 25'' = 313^\circ 21' 35''$.

Da sažmemo vezu sfernih i geografskih koordinata: Ako promatramo poziciju X na Zemljinoj površini koja ima geografsku širinu ϕ i geografsku dužinu λ , onda su njezine sferne koordinate r , θ , φ dane sljedećim formulama:

$$r = R = 6371 \text{ km},$$

$$\theta = \begin{cases} 90^\circ - \frac{\phi}{N}, & \text{ako je } X \text{ sjeverno od ekvatora} \\ & \text{ili na njemu} \\ 90^\circ + \frac{\phi}{S}, & \text{ako je } X \text{ južno od ekvatora} \end{cases}$$

⁴ Ovu konvenciju preuzeli smo iz kristalografije i mineralogije, gdje se u stereografskim projekcijama kristala točke iznad ekvatorske ravnine označavaju s $\bullet$, a one ispod s $\times$.

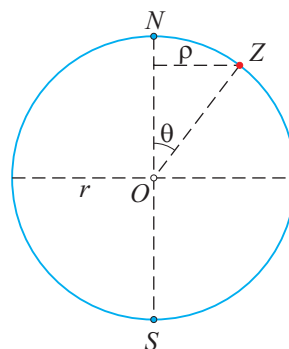
⁵ Upotrijebili smo oznaku λ/E kako bismo istakli da se uzima λ bez oznake E, odnosno kao i kod mjernih jedinica uzeli smo da je E multiplikativna konstanta. Analogno ćemo u sljedećoj rečenici dijeliti s W.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{E}, & \text{ako je } X \text{ istočno od početnog} \\ & \text{meridijana ili na njemu,} \\ 360^\circ - \frac{\lambda}{W}, & \text{ako je } X \text{ zapadno od} \\ & \text{početnog meridijana.} \end{cases}$$

Sada možemo naučeno utvrditi izračunavanjem i polarne udaljenosti i azimuta bilo kojeg odabranog grada. Umjesto s takvim primjerom, završimo ovaj nastavak nečim malo kompliciranijim, prikladnim za 4. razred (prirodoslovno-matematičkih usmjerenih) gimnazija. Obuhvatit ćemo osnovne činjenice o trigonometrijskim funkcijama i polarnom koordinatnom sustavu u ravni.

Problem koji želimo riješiti glasi: Kako je na slici 1 realistično ucrtana pozicija, primjerice, Zagreba? Prvo, nacrtana kružnica očito nema promjer R , nego manji. Neka je odabrana kružnica u kojoj crtamo sliku poput slike 1 polumjera p . Iz geografskih koordinata od Z možemo izračunati njegov azimut i polarnu udaljenost. Proizvoljna fiksna točka na njoj je onda točka G , a središte kružnice je N . Znamo da je $\lambda_Z = \angle GNZ$. Ako je dozvoljeno koristiti se kutomjerom (ili primjerice GeoGebrom), lako taj kut nanese u pravom smjeru u odnosu na polumjer $\overline{NG}$ te time odredimo polumjer na kojemu leži točka Z .

A što ako se ne smijemo ili ne možemo koristiti kutomjerom ni GeoGebrom, nego u neki računalni program trebamo eksplicitno unijeti poziciju Z ? U tom slučaju gledat ćemo nacrtanu kružnicu kao kružnicu u Kartezijevu koordinatnom sustavu kojemu je ishodište N , a os apscisa na pravcu NG (s pozitivnim smjerom prema G). Tada zapravo određujemo Kartezijeve koordinate kraja polumjera na kojem je Z iz njegovih polarnih koordinata. Pritom je polumjer (udaljenost od ishodišta)⁶ točno p , a polarni kut je točno azimut φ , pa dobivamo da su Kartezijeve koordinate od kraja navedenog polumjera ($p \cos \varphi$, $p \sin \varphi$) te možemo ucrtati polumjer $\overline{NZ}$ (crtkano na slici 1). Gdje je na njemu Z ?



Slika 2. Profilni prikaz Zemljine kugle

Pogledajmo sliku 2, koja predstavlja profil Zemljine kugle iz smjera okomitog na meridijan na kojem je Z . Sa slike lako vidimo da je $p = r \cos \theta$. Ako tako izračunani p nanese na polumjer $\overline{NZ}$ sa slike 1, dobili smo korektnu – s obzirom na mjerilo – poziciju za Z . Naravno, mogli smo ju dobiti i direktno koristeći se preračunom sfernih u Kartezijeve koordinate – primjerice koristeći se nekim *online*-kalkulatorom poput <https://www.omnicalculator.com/math/spherical-coordinates> – što isto ima svojih prednosti, ne zbog brzine izračuna, već zbog razvijanja prostornog zora kako bi se iz dobivenih Kartezijevih koordinata u prostoru dobile točne Kartezijeve koordinate u ravni za sliku poput slike 1.

LITERATURA

- 1/ Raul Ibáñez Torres (2011.): *El sueño del mapa perfecto – Cartografía y Matemáticas*, RBA Libros.
- 2/ H. Havlicek: *Mathematical Cartography*, <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/karten.html>
- 3/ L. Šer (2016.): *Geometrija Zemljine površine* (diplomski rad), PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu.
- 4/ MacTutor History of Mathematics Archives, Cartography, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Cartography/>
- 5/ Odluke o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike i Geografije za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, Narodne novine 7/2019.

⁶ Ova se udaljenost za polarni sustav često naziva polarnom udaljenošću, ali smo izbjegli taj izraz kako ne bi došlo do miješanja sa značenjem istog izraza u sfernim koordinatama.