

Godine u limesu

Matematičari vole sastavljati zadatke u kojima se pojavljuju brojevi karakteristični za neku pojavu ili trenutak, kao što je primjerice broj kalendarske godine. Sljedeći je zadatak upravo takvog tipa – posvećen je broju 2023.

Zadatak. Izračunajmo $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2023} - 2022)^n$.

Riješit ćemo ga koristeći se limesima koji su poznati učenicima četvrtog razreda srednje škole. Kao što znamo, broj e se definira kao limes niza $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Znamo da ako broj $\frac{1}{n}$ zamijenimo s realnim brojem x , tada također vrijedi $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ (dokaz ove tvrdnje nalazi se u članku [1]). Logaritmiranjem ovog limesa dobivamo:

$$1 = \ln e = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln (1 + x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + x)}{x}.$$

Uvrstimo li u limes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1$ supstituciju $x = a^y - 1$ dobivamo:

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln (a^y)}{a^y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln a}{a^y - 1}, \quad \text{odnosno} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a.$$

Razmotrimo oblik limesa zadanog u zadatku. U izrazu $\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2023}$ nalazi se 2023 pribrojnika te bazu potencije iz zadanog limesa napišimo ovako:

$$\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2023} - 2022 = (\sqrt[n]{1} - 1) + (\sqrt[n]{2} - 1) + \dots + (\sqrt[n]{2023} - 1) + 1.$$

Kad n teži u beskonačno, izraz u svakoj od ovih zagrada teži u 0, pa cijela baza teži u 1, tj. limes je oblika 1^∞ .

Postupimo onako kako standardno računamo limese tog oblika, tj. svedimo ga na oblik $(1 + B)^{\frac{1}{B}}$ i iskoristimo činjenicu da taj izraz teži prema e kad B teži k nuli.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2023} - 2022)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((\sqrt[n]{2} - 1) + \dots + (\sqrt[n]{2023} - 1) + 1 \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1 + B)^{\frac{1}{B}} \right)^{nB} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} nB} \end{aligned}$$

gdje smo s B označili izraz $B = (\sqrt[n]{2} - 1) + \dots + (\sqrt[n]{2023} - 1)$. Sad posebno izračunajmo limes od nB .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nB &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt[n]{2} - 1)}{\frac{1}{n}} + \dots + \frac{(\sqrt[n]{2023} - 1)}{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln 2023 = \ln(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2023) = \ln 2023!. \end{aligned}$$

Konačno, traženi je limes jednak $e^{\ln 2023!} = 2023!$.

Što dalje? U ovom je zadatku baza sadržavala 2023 pribrojnika oblika $\sqrt[n]{k}$. Što će se promijeniti stavimo li u bazu 2024 pribrojnika (veza sa sljedećom kalendarskom godinom)? Drugim riječima, koliko je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2024} - 2023)^n?$$

Kad to riješite, možete i lako generalizirati ovaj zadatak.

Literatura: Zašto je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ ako $x_n \rightarrow \infty$? *Matematika i škola* 114, (2022.), str. 173.