

Bicentrični četverokuti – rijetkost ili ne?

Marija Galić i Ana Matijević, Zagreb



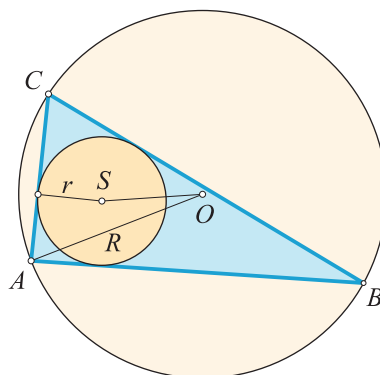
Svima su nam dobro poznati pojmovi tetivnog i tangencijalnog četverokuta. Međutim, osim što postoje četverokuti kojima se može upisati kružnica i četverokuti kojima se kružnica može opisati, postoje i četverokuti koji imaju oba navedena svojstva. Takvi se četverokuti nazivaju **bicentričnim četverokutima**. Bicentrični četverokuti su dakle konveksni četverokuti koji su istovremeno i tangencijalni i tetivni.

(Bicentrični) trokuti

Svakom se trokutu može upisati i opisati kružnica. Kažemo da je svaki trokut i tetivan i tangencijalan, odnosno bicentričan. Odnos polumjera njemu upisane i opisane kružnice dan je Eulerovom formulom (za trokut).

Teorem 1. (Eulerov teorem) Neka je R polumjer trokutu opisane kružnice, a r polumjer trokutu upisane kružnice (slika 1). Udaljenost središta O opisane kružnice i središta S upisane kružnice danog trokuta $\triangle ABC$ dana je formulom

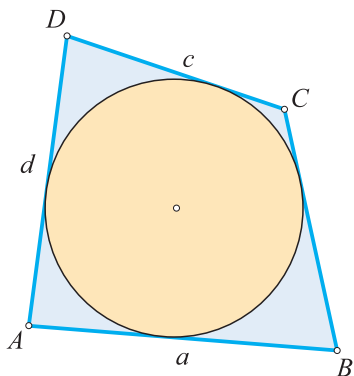
$$|OS|^2 = R^2 - 2Rr.$$



Slika 1. Opisana i upisana kružnica trokuta

Tangencijalni četverokuti

Poznato je da se kružnica može upisati svakom trokutu, no to svojstvo kod četverokuta nije tako često. Konveksni četverokut kojemu se može upisati kružnica naziva se **tangencijalni četverokut** (slika 2).



Slika 2. Tangencijalni četverokut

Sljedeći nam teorem donosi lijepo svojstvo koje vrijedi za stranice tangencijalnog četverokuta. Teorem je nazvan prema francuskom inženjeru Henriju Pitotu koji je živio na prijelazu iz 17. u 18. stoljeće.

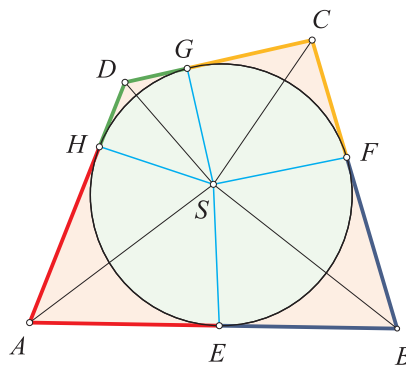
Teorem 2. (Pitotov teorem) Zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak je zbroju duljina drugih dviju stranica tog četverokuta, odnosno $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.

Umjesto formalnog dokaza ovog teorema ponudit ćemo tzv. "dokaz bez riječi", tj. sliku tangencijalnog četverokuta s ucrtanim polumjerima upisane kružnice i spojnicama središta i vrhova. Na slici se pojavljuju 4 para sukladnih trokuta, a stranice koje sudjeluju u traženoj jednakosti obojene su tako da sukladne stranice imaju istu boju.

Vrijedi i obrat ovoga teorema.

Teorem 3. (Obrat Pitotova teorema). Ako za duljine stranica konveksnog četverokuta $ABCD$ vrijedi $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, onda je taj četverokut tangencijalan.

Promatrajući opet sliku tangencijalnog četverokuta u kojem su povučene spojnice središta kružnice s



Slika 3. "Dokaz" Pitotova teorema

vrhovima (slika 3), uočavamo 4 trokuta kojima je jedan vrh upravo središte kružnice, druga dva vrha su ujedno vrhovi četverokuta, a visine tih trokuta su polumjeri upisane kružnice. Tada je površina cijelog četverokuta jednaka zbroju površina tih četiriju trokuta, tj.

$$P = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{a + b + c + d}{2}r.$$

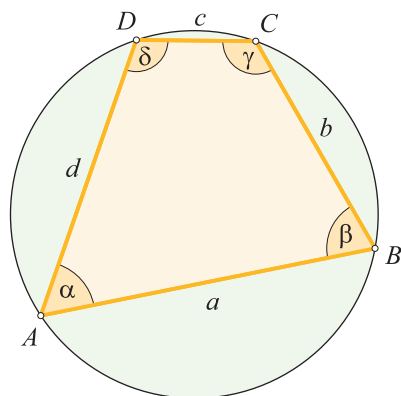
Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 4. Neka su a, b, c i d duljine stranica tangencijalnog četverokuta $ABCD$, a r polumjer njemu upisane kružnice. Tada površinu tangencijalnog četverokuta $ABCD$ možemo računati s pomoću formule

$$P = \frac{a + b + c + d}{2}r.$$

Tetivni četverokuti

Osim što postoje četverokuti kojima se može upisati kružnica, postoje i oni kojima se kružnica može opisati. Stranice takvog četverokuta tetive su njemu opisane kružnice, odakle im i dolazi naziv. Konveksni četverokut kojemu se može opisati kružnica naziva se **tetivni četverokut** (slika 4).

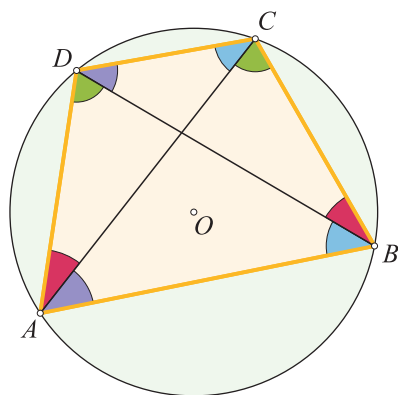


Slika 4. Tetivni četverokut

Sada ćemo iskazati neka od svojstava tetivnog četverokuta.

Teorem 5. Nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta su suplementarni.

Dokaz. Neka je zadan tetivni četverokut $ABCD$ kao na slici 5 i neka su unutarnji kutovi tog četverokuta kod vrhova A, B, C, D nazvani redom $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



Slika 5. Poučak o kutovima tetivnog četverokuta

Iz činjenice da su obodni kutovi nad istim lukom kružnice jednakih veličina, slijedi

$$\begin{aligned} \sphericalangle CAD &= \sphericalangle CBD & \sphericalangle BAC &= \sphericalangle BDC \\ \sphericalangle DCA &= \sphericalangle DBA & \sphericalangle ACB &= \sphericalangle ADB. \end{aligned}$$

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= (\sphericalangle CAD + \sphericalangle BAC) + (\sphericalangle DCA + \sphericalangle ACB) \\ &= (\sphericalangle CBD + \sphericalangle BDC) + (\sphericalangle DBA + \sphericalangle ADB) \\ &= (\sphericalangle CBD + \sphericalangle DBA) + (\sphericalangle BDC + \sphericalangle ADB) \\ &= \beta + \delta. \end{aligned}$$

Kako je zbroj kutova u svakom četverokutu 360° , tako je i $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. No, kako je $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, slijedi

$$\alpha + \gamma = 180^\circ, \quad \beta + \delta = 180^\circ,$$

čime je teorem dokazan.

Teorem 6. (Ptolomejev teorem) Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.

Vrijedi i obrat teorema 6.

Teorem 7. Neka su α i β unutarnji kutovi tetivnog četverokuta $ABCD$ pri vrhovima A i B , redom, a duljine stranica četverokuta redom a, b, c, d . Za površinu tetivnog četverokuta $ABCD$ vrijedi

$$P = \frac{1}{2}(a \cdot d + b \cdot c) \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}(a \cdot b + c \cdot d) \cdot \sin \beta.$$

Bicentrični četverokuti

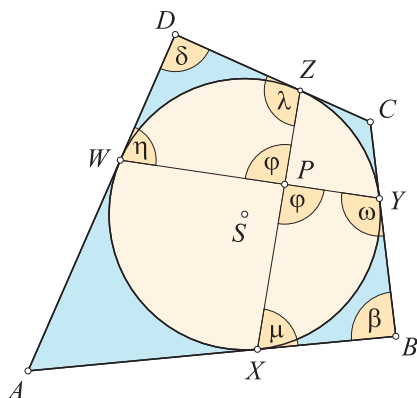
Konveksni četverokuti kojima se može i upisati i opisati kružnica nazivaju se **bicentrični četverokuti**. Iz ove definicije proizlazi da bicentrični četverokuti imaju sva svojstva i tetivnih i tangencijalnih četverokuta. Zovemo ih još i tetivno-tangencijalnim četverokutima. Kvadrat je najočitiji primjer jednog bicentričnog četverokuta.

Radi karakterizacije bicentričnih četverokuta uvodimo novi pojam, a to su **tangentne tetive**.

Definicija 1. Ako upisana kružnica tangencijalnog četverokuta $ABCD$ dodiruje taj četverokut u točkama X, Y, Z, W redom, onda se odsječci $\overline{XZ}$ i $\overline{YW}$ nazivaju tangentne tetive.

Teorem 8. Tangentne tetive u tangencijalnom četverokutu su međusobno okomite ako i samo ako je taj četverokut bicentričan.

Dokaz. Zadan je tangencijalni četverokut $ABCD$. Taj četverokut dira kružnicu u točkama X, Y, Z i W tako da je $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{BC}$, $Z \in \overline{CD}$ te $W \in \overline{AD}$. Neka su α, β, γ i δ unutarnji kutovi četverokuta $ABCD$ uz vrhove A, B, C i D redom.

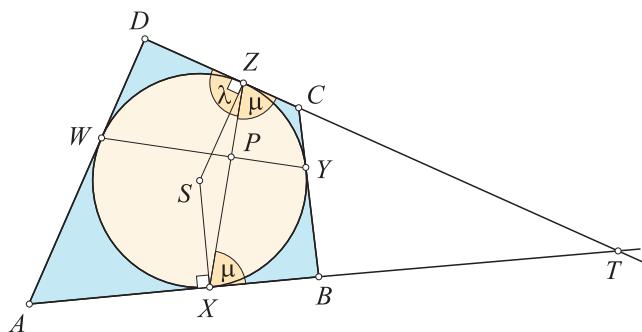


Slika 6. Tangentne tetive

Nadalje, neka je P točka presjeka tangentskih tetiva $\overline{XZ}$ i $\overline{YW}$. Označimo ostale kutove na sljedeći način: $\angle XPY = \angle ZPW = \varphi$, $\angle BXP = \mu$, $\angle PYB = \omega$, $\angle DZP = \lambda$ te $\angle PWD = \eta$. Zbroj veličina kutova svakog četverokuta iznosi 360° pa stoga u četverokutima $XBYP$ i $PZDW$ imamo:

$$\mu + \beta + \omega + \varphi = 360^\circ, \quad \eta + \varphi + \lambda + \delta = 360^\circ.$$

Zbrojimo li ove dvije jednadžbe, dobivamo $\mu + \beta + \omega + \varphi + \eta + \varphi + \lambda + \delta = 720^\circ$. Ujedno vrijedi $\mu + \lambda = 180^\circ$. Naime, kad produljimo stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ do njihovog sjecišta T , dobivamo jednakostraničan trokut XZT s osnovicom $\overline{ZX}$ (slika 7).



Slika 7. Tangentne tetive

U njemu je $\angle TXZ = \angle XZT = \mu$, a budući da su kutovi $\angle XZT$ i $\angle DZX$ suplementarni, dobivamo da je $\mu + \lambda = 180^\circ$. Na isti se način dobiva da vrijedi $\omega + \eta = 180^\circ$. Uvrštavanjem ovih jednakosti u gornji zbroj dobivamo:

$$2\varphi + \beta + \delta = 360^\circ \iff \beta + \delta = 360^\circ - 2\varphi.$$

Tangentne tetive $\overline{XZ}$ i $\overline{YW}$ su okomite, odnosno $\varphi = 90^\circ$ ako i samo ako je $\beta + \delta = 180^\circ$, što

nam je već jako dobro poznata karakterizacija tetivnog četverokuta (teorem 5) s obzirom na to da su β i δ nasuprotni kutovi četverokuta. Time je teorem dokazan.

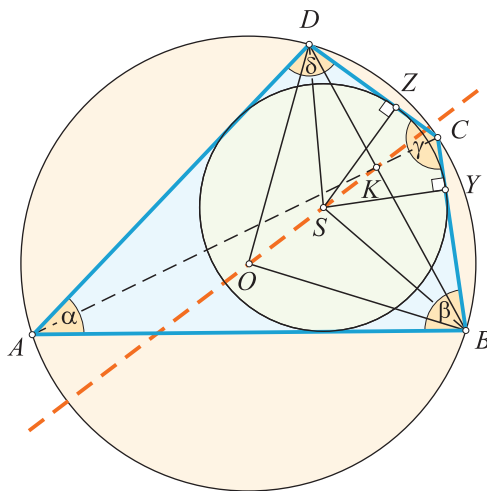
Za bicentrične četverokute vrijedi i sljedeći teorem koji je zapravo analogon Eulerova teorema za trokute. Ime je dobio po švicarskom matematičaru Nicolasu Fussu (1725. – 1826.), učeniku i prijatelju velikog matematičara Leonharda Eulera, a koji se prvi bavio bicentričnim četverokutima.

Teorem 9. (Fussov teorem) Neka je $ABCD$ bicentrični četverokut s polumjerom upisane kružnice r i polumjerom opisane kružnice R i neka je d udaljenost između središta S upisane i središta O opisane kružnice. Tada vrijedi jednakost

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}.$$

No, vrijedi i obrat. Ako su zadane dvije kružnice različitih polumjera R i r , jedna unutar druge, čija su središta udaljena za d i takve da je zadovoljena jednakost iz Fussova teorema, tada postoji četverokut istovremeno upisan vanjskoj i opisan unutarnjoj kružnici. Štoviše, prema Ponceletovu teoremu, o kojem ćemo nešto više reći na kraju članka, takvih četverokuta postoji beskonačno mnogo.

Teorem 10. Dan je bicentrični četverokut $ABCD$ s opisanom kružnicom $k_o(O, R)$ i upisanom kružnicom



Slika 8. Teorem o trima kolinearnim točkama O , S i K

$k_u(S, r)$. Neka je K točka u kojoj se sijeku dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ tog četverokuta. Vrijedi da su točke O , S i K kolinearne (slika 8).

Za kraj ovog dijela navodimo jednu formulu s pomoću koje možemo računati površinu bicentričnog četverokuta.

Teorem 11. Neka su a , b , c i d duljine stranica bicentričnog četverokuta $ABCD$. Za površinu bicentričnog četverokuta $ABCD$ vrijedi

$$P = \sqrt{abcd}.$$

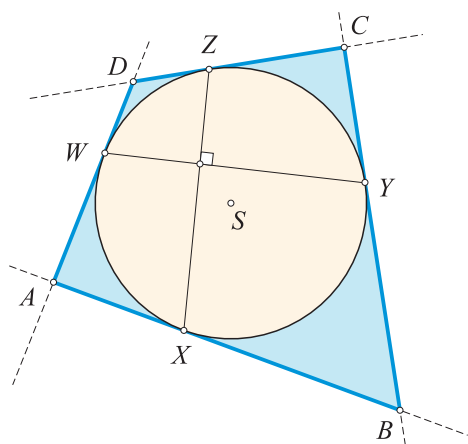
Detaljni dokazi svih navedenih teorema i još mnoga svojstva četverokuta mogu se naći u radu [2].

Konstrukcija

Vjerojatno najčešće korištena metoda za preciznu konstrukciju bicentričnog četverokuta temelji se na teoremu 8 i glasi ovako.

Uzmimo proizvoljnu duljinu r . Prvo ćemo konstruirati upisanu kružnicu $k_u(S, r)$. Zatim u toj kružnici konstruiramo dvije međusobno okomite tetive $\overline{XZ}$ i $\overline{YW}$. U krajnjim točkama tih tetiva X , Y , Z i W konstruiramo tangente na kružnicu k_u . Te tangente sijeku se u točkama A , B , C , D . Konstruirali smo bicentrični četverokut (slika 9).

Ova konstrukcija daje nam odgovor na pitanje koliko ima bicentričnih četverokuta jer u toj upisanoj kružnici možemo povući po volji mnogo parova



Slika 9. Konstrukcija bicentričnog četverokuta

okomitih tetiva i svaki od tih parova generira novi bicentrični četverokut.

Ponceletov teorem

Jedan od najviše proučavanih teorema projektivne geometrije je **Ponceletov teorem zatvaranja** (u literaturi ga pronalazimo i pod imenom **Ponceletov porizam**) koji općenito kaže da ako postoji mnogokut upisan jednoj i opisan drugoj konici, tada takvih mnogokuta postoji beskonačno mnogo. Ovaj izvanredan teorem dokazao je francuski matematičar i vojni inženjer Jean Victor Poncelet u prvoj polovici 19. stoljeća. U specijalnom slučaju kada je konika kružnica, teorem glasi ovako: ako za neke dvije kružnice k_u i k_o možemo pronaći jedan n -terostrani mnogokut ($n > 2$) koji je istovremeno upisan u k_o (što znači da svi njegovi vrhovi leže na k_o) i opisan oko k_u (što znači da su sve njegove stranice tangentne na k_u), onda ih možemo pronaći beskonačno mnogo. Ako još uzmemo da je mnogokut četverokut, dobivamo upravo Ponceletov teorem za bicentrične četverokute.

Teorem 11 (Ponceletov teorem). Ako su dvije kružnice, jedna unutar druge, upisana i opisana kružnica bicentričnog četverokuta, tada je svaka točka na opisanoj kružnici vrh bicentričnog četverokuta koji ima istu upisanu i opisanu kružnicu.

Dakle, ako za neke dvije kružnice, koje su jedna unutar druge, postoji bicentrični četverokut (četverokut upisan jednoj i opisan drugoj kružnici), tada bicentričnih četverokuta s istom upisanom i opisanom kružnicom ima beskonačno mnogo.

LITERATURA

- 1/ Martin Josefsson (2010.): Calculations Concerning the Tangent Lengths and Tangency Chords of a Tangential Quadrilateral, *Forum Geometricorum*, 10:123–124, 2010. (dostupno na FG201013.dvi (fau.edu))
- 2/ Ana Matijević (2022): *Bicentrični mnogokuti*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb.