

Što je veće: eksponencijalna funkcija ili polinom?

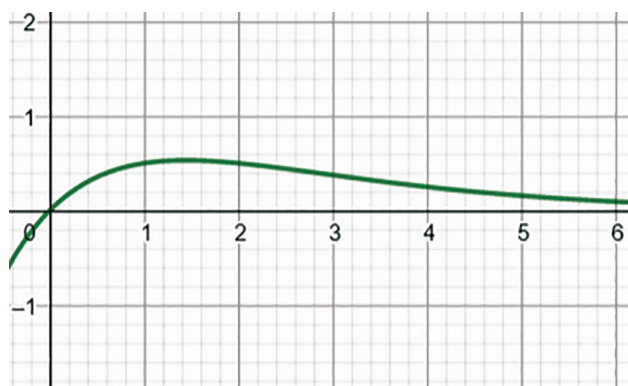
Lovro Sindičić i Sanja Varošaneć, Zagreb

Iza ovog pomalo neobičnog naslova krije se proučavanje ponašanja kvocijenta polinoma i eksponencijalne funkcije kad x neograničeno raste. Drugim riječima, pitamo se koliko iznosi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_n(x)}{a^x}$$

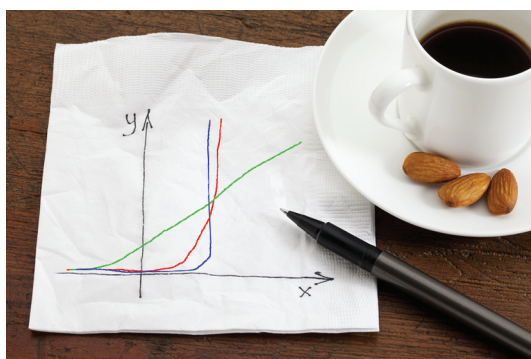
gdje je p_n polinom n -tog stupnja, a a^x je opća eksponencijalna funkcija s bazom $a > 1$.

Motivacija nam je bio jedan zadatak iz udžbenika [1] u poglavlju *Limes funkcije* u kojem se tražilo određivanje vrijednosti $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x}$ te objašnjenje. Budući da taj zadatak nije pripadao niti jednoj grupi zadataka koji se tipski rješavaju, pokušali smo pogoditi njegovo rješenje koristeći se grafom funkcije $f(x) = \frac{x}{2^x}$ (slika 1).

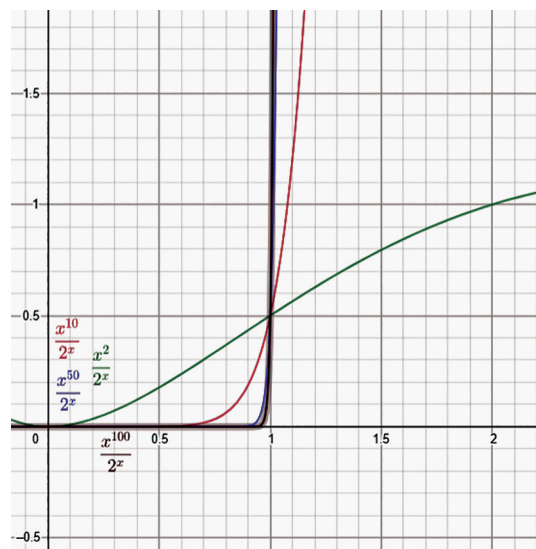


Slika 1. Graf funkcije $f(x) = \frac{x}{2^x}$

Lovro Sindičić, mag. educ. math. et inf., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, lovro.sindicic@fer.hr
prof. dr. sc. Sanja Varošaneć, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, varosans@math.hr



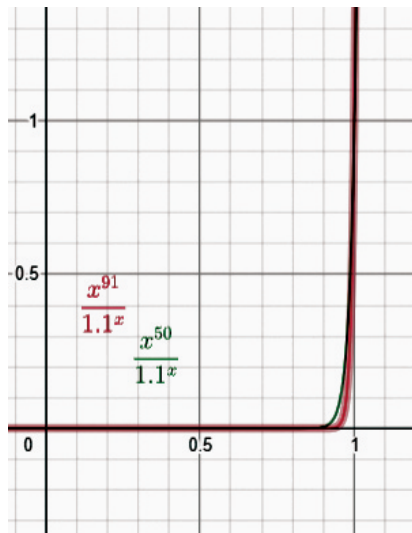
Koristeći se crtežom, shvatili smo da je limes jednak 0. Međutim, nekog objašnjenja zasnovanog na matematičkom zaključivanju u tom poglavlju nismo pronašli. Stoga smo eksperimentirali s različitim polinomima i različitim vrijednostima baze a . Isključivo smo radili s monomima jer je poznato da se polinom za dovoljno veliki x ponaša kao svoj vodeći monom. Na slici 2 je nekoliko grafova funkcija u kojima je baza a bila fiksna, $a = 2$, a stupanj polinoma se mijenjao.



Slika 2.

Dok je stupanj polinoma bio nizak, dobivali smo da je limes jednak 0. Međutim, za veće stupnjeve 50,

100, ... izgledalo je kao da je ta slutnja pogrešna. Promjenom baze na $a = 1.1$ dobivali smo slične slike za veće stupnjeve polinoma (slika 3).



Slika 3.

Svi ti grafovi dali su naslutiti da je polinom veći od eksponencijalne funkcije za dovoljno velike stupnjeve polinoma. No, u zadatku se tražilo ponašanje te funkcije u beskonačnosti, odnosno kad x neograničeno raste. GeoGebra nam omogućava vrlo jednostavnu promjenu skale na koordinatnoj osi te kad smo raspon varijable x povećali 100, odnosno 10 000 puta, svi su grafovi postali istog oblika (slika 4).

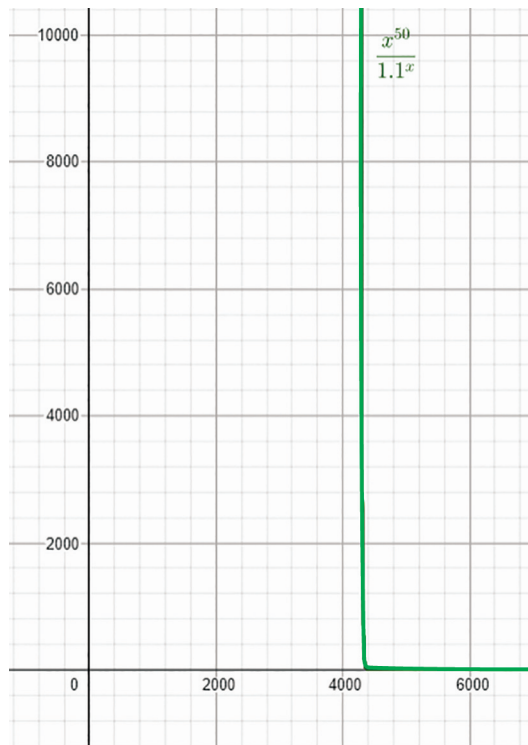
Ovo nas je opet vratilo na hipotezu da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

Ovo je ujedno i primjer jednog eksperimentalnog opažanja u kojem smo na temelju nekoliko primjera mogli doći do neistinite tvrdnje.

Dokažimo da je $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$, tj. da eksponencijalna funkcija s bazom većom od 1 brže raste od bilo kojeg polinoma. Zbog jednostavnosti dokaza uzet ćemo da je $a = e$ jer ako se u limesu pojavi a^x , tada supstitucijom $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ zadatak svodimo na bazu e . Dokažimo onda početnu tvrdnju:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$



Slika 4.

Dokaz. Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine (AG nejednakost) znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot (1+x)} &\leq \frac{1 + \dots + 1 + (1+x)}{n} \\ &= 1 + \frac{x}{n} \\ 1+x &\leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Kad n teži u beskonačno, dobivamo da vrijedi

$$1+x \leq e^x, x > 0. \quad (2)$$

Iz nejednakosti (2) znamo da za $x > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + \frac{x}{n} \leq e^{\frac{x}{n}}.$$

Budući da je funkcija $f(a) = a^n$ rastuća za $a > 0$, možemo pisati

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x. \quad (3)$$

Iz (3) možemo pisati da za $m > n$ vrijedi

$$0 \leq \frac{x^n}{e^x} \leq \frac{x^n}{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m}. \quad (4)$$

Puštajući x prema beskonačnosti te primjenom teorema o sendviču na (4), dobivamo traženu tvrdnju. ■

Ako proučimo gornji dokaz, možemo primijetiti da je dokaz sadržan u dva dijela. U prvom se dijelu dokazuje da vrijedi $e^x \geq x + 1$, a onda slijedi jednostavan nastavak koji smo gore proveli. U nastavku navodimo malo drukčiji pristup dokazu nejednakosti $e^x \geq x + 1$ jer kada tu nejednakost dokažemo, početna tvrdnja lagano slijedi. Kako se mnogi učenici srednjih škola nikada nisu susreli s AG nejednakosti, u nastavku ćemo primijeniti ekvivalentnu nejednakost koja se radi i dokazuje u većem broju srednjih škola i zato smatramo da je taj dokaz bolji i prikladniji za provođenje na nastavnom satu. Dokažimo onda $e^x \geq x + 1$ koristeći se poznatom nejednakosti iz srednje škole.

Bernoulijeva nejednakost

Za svaki $y \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća nejednakost

$$1 + ny \leq (1 + y)^n. \quad (5)$$

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje u 4. razredu srednje škole metodom matematičke indukcije. ■

Budući da (5) vrijedi za svaki $y \geq -1$, onda posebno vrijedi i za $y = \frac{x}{n}$

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Puštanjem limesa po n slijedi tražena tvrdnja

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x.$$

Pokažimo kako nejednakost $e^x > 1 + x$ možemo dokazati i na još dva načina.

Ovaj se dokaz obično provodi u temi Primjena diferencijalnog računa. Naime, ako je funkcija derivabilna, tada vrijedi: derivacija funkcije je nenegativna na nekom intervalu ako i samo ako je funkcija rastuća na tom intervalu. Promotrimo funkciju $f(x) = e^x - x - 1$ na intervalu $[0, +\infty)$. Njezina derivacija je $f'(x) = e^x - 1$ i $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \geq 0$, odnosno zaključujemo da f raste na $[0, +\infty)$. To znači da za svaki $x \geq 0$ vrijedi $f(x) \geq f(0)$, odnosno $e^x - x - 1 \geq e^0 - 0 - 1 = 0$. Dakle, $e^x \geq x + 1$ za svaki $x \geq 0$.

Drugi se dokaz zasniva na činjenici da je e^x limes niza (b_n) , gdje je

$$b_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

ali budući da se ta tvrdnja ne dokazuje u srednjoj školi, ovaj dokaz nije primjeren za učenike srednje škole. Ipak pokažimo i taj dokaz tražene nejednakosti.

Za nenegativne brojeve očito vrijedi:

$$1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

pa uzimanjem limesa po n dobivamo da je

$$1 + x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x,$$

čime je nejednakost $e^x \geq 1 + x$ dokazana.

LITERATURA

- 1/ B. Dakić, N. Elezović (2021.): *Matematika 4, 2.dio*, udžbenik za 4. razred gimnazija i strukovnih škola, za 3 ili 4 sata nastave tjedno, Element, Zagreb.