

Promjena odnosa Heronove formule i računanja površine trokuta s cjelobrojnim stranicama u udžbenicima matematike

Josip Sliško,
Puebla, Meksiko



U prethodnom članku [1] predložena je važna didaktička činjenica: do XVI. stoljeća površina trokuta sa stranicama 13, 14 i 15 računala se na dva ravnopravna načina. Prvi je način bio upotreba poluumnoška baze i visine, uz prethodno računanje vrijednosti visine spuštene na stranicu 14. Drugi način bio je upotreba Heronove formule u kojoj je površina trokuta jednaka kvadratnom korijenu iz umnoška poluopsega i razlika poluopsega i duljine svake stranice.

U ovom članku razmatra se kako se tijekom vremena mijenjao odnos Heronove formule i računanja površine trokuta sa stranicama 14, 15 i 16.

U prvom dijelu prikazuje se evolucija tog odnosa u engleskim udžbenicima matematike od XVII. do

XIX. stoljeća. Ti udžbenici imaju posebnu važnost zbog njihova globalnog utjecaja ne samo na američku, već i na nastavu matematike u ostalim dijelovima svijeta.

U drugom dijelu razmatraju se aktualne inačice didaktičkog uvođenja Heronove formule i kritički spominju naznake njezine navodne superiornosti. Takav algoritamski pristup nalaženja površine trokuta može imati negativne posljedice u promociji učenikova kreativnog mišljenja u zadacima kada su sve tri stranice trokuta *kvadratni korijeni cijelih brojeva*. U takvim zadacima dolazi do izražaja inferiornost uobičajenog oblika Heronove formule u odnosu na ostale moguće postupke nalaženja površine trokuta. Ta tema bit će detaljno izložena u završnom članku ove serije.

Heronova formula i površina trokuta (13, 14, 15) u Engleskoj: Wingate i Hutton

Edmund Wingate (1596. – 1656.) (slika 1) bio je engleski matematičar, pravnik i član Parlamenta u periodu *inter regnum*.



Slika 1. Edmund Wingate (1596. – 1656.)

1630. godine napisao je udžbenik *Mr. Wingate's arithmetick* koji je sadržavao "jednostavan i blizak način stjecanja znanja i prakse za uobičajenu aritmetiku". Udžbenik je nakon Wingateove smrti, proširivan i poboljšavan, pa je nizom izdanja značajno utjecao na kasnije slične udžbenike ostalih autora.

Četvrto izdanje, objavljeno 1668., uredio je nastavnik matematike John Kersey [2]. U tom se izdanju na 475. stranici pojavljuje pitanje broj 52 u kojem se traži površina jednog komada zemlje u obliku trokuta sa stranicama 15 *perches*, 14 *perches* i 13 *perches*. *Perch* je stara engleska mjera za duljinu jednaka 16.5 stopa ili otprilike 5 metara.

Odgovor (84 kvadratnih *perches*) se nalazi primjenom verbalno izloženog algoritma bez spominjanja da se radi o matematičkom obrascu koji je prije mnogo stoljeća izveo Heron. Numerička konkretizacija algoritma predložena je veoma pregledno (slika 2).

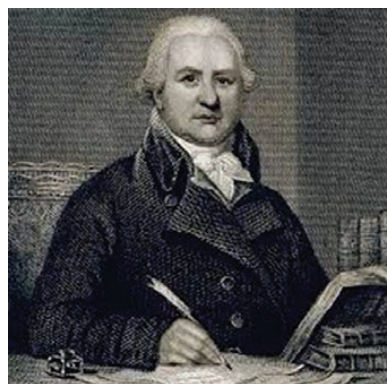
	<i>Perches</i>
The 3 sides of a triangle	$\begin{array}{r} 15 \\ 14 \\ 13 \end{array}$
The sum of the 3 sides	42
The half of that sum	21
The 3 remainders found out by subtracting each side from the half sum	$\begin{array}{r} 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$
The product arising from the continual multiplication of the four last numbers	7056
The square root of which product is the content required, to wit,	84

Slika 2. Numerička konkretizacija Wingateovog algoritma

Važno je naglasiti da Wingate ne spominje drugi, ranije popularan način za nalaženje površine trokuta kada su poznate sve tri stranice [1]. Razlog može biti vrlo jednostavan: taj drugi način nije mu bio poznat!

Da bi se imala jasnija slika o tome kako je u XVIII. stoljeću i kasnije Heronova formula postala jedini način nalaženja površine trokuta kada su poznate tri stranice, korisno je analizirati tu temu u dvama djelima koja je napisao Charles Hutton.

Charles Hutton (slika 3) bio je engleski matematičar, cijenjeni profesor matematike na Vojnoj akademiji u Woolwichu, urednik poznatog časopisa za popularizaciju matematike *The Ladies' Diary*, prevoditelj Ozonamova djela iz rekreacijske matematike [3], član engleskog Kraljevskog društva kao i nizozemske i američke akademije znanosti i umjetnosti.



Slika 3. Charles Hutton (1737. – 1823.)

1770. godine Hutton je objavio monumentalno djelo *A Treatise on Mensuration, both in Theory and Practice* [4]. Za njega je termin *mensuration* značio “umjetnost i znanost mjerenja veličine figura”.

Kao prvo pravilo za nalaženje površine trokuta Hutton navodi:

“Pomnoži jednu od stranica duljinom normale koja se spušta na nju iz suprotnog kuta i polovina tog umnoška bit će površina” [4, str. 63].

Zanimljivo je da je Hutton to pravilo primijenio na slučaj trokuta čije stranice imaju duljine **20 chains**, **30 chains** i **40 chains**. Tada je prethodni korak u primjeni nužno bio nalaženje duljine visine! *Chain* je još jedna stara engleska mjera za duljinu i iznosi 66 stopa.

Visinu (**14.52368 chains**) na stranicu **40 chains** našao je Hutton trigonometrijskim postupkom. Tražena površina bila je **290.4736** kvadratnih *chains*.

U druga dva primjera računanja površine, duljine osnovice i visine su poznate. U trećem primjeru poznate su duljine dviju stranica (**25 chains** i **21.5 chains**) i vrijednost kuta među njima (**45°**). Dakle, i u ovom primjeru primjena prvog pravila podrazumijeva prethodno nalaženje visine!

Drugo je pravilo za nalaženje površine trokuta bilo [4, str. 64]:

“Od polovine zbroja triju stranica oduzmi redom svaku stranicu. Pomnoži polovinu zbroja trima ostacima oduzimanja i kvadratni korijen iz krajnjeg umnoška bit će površina trokuta.”

Za razliku od Wingatea, Hutton dokazuje veoma dugačkim postupkom istinitost ovakvog nalaženja površine trokuta. Primjenjuje ga opet na trokut čije su stranice **20 chains**, **30 chains** i **40 chains** (slika 4).

EXAMPLE I. What is the area of a triangle whose three sides are 20, 30, 40 chains?

$$\begin{array}{r}
 40 \qquad 45 \qquad 45 \\
 30 \qquad 30 \qquad 20 \\
 \hline
 20 \qquad 15 \text{ sec. dif.} \qquad 25 \text{ third dif.} \\
 \hline
 2)90 \qquad \qquad \qquad 15 \text{ second dif.} \\
 \hline
 45 \text{ half sum} \qquad \qquad 375 \\
 40 \qquad \qquad \qquad 5 \text{ first dif.} \\
 \hline
 5 \text{ first dif.} \qquad \qquad 1875 \\
 \qquad \qquad \qquad 45 \text{ half sum} \\
 \qquad \qquad \qquad \hline
 \qquad \qquad \qquad 9375 \\
 \qquad \qquad \qquad 7500 \\
 \qquad \qquad \qquad \hline
 \qquad \qquad \qquad 84375 (290 \cdot 4737 \text{ sq. chains}
 \end{array}$$

Slika 4. Huttonova numerička konkretizacija drugog pravila za nalaženje površine trokuta

Iz izloženog je jasno kako je Hutton dobro poznao razne moguće načine nalaženja površine trokuta i da je za trokut sa stranicama **20**, **30** i **40** izravno prezentirao dva različita postupka, kao što je bilo uobičajeno ranije za slučaj trokuta sa stranicama **13**, **14** i **15**.

Zanimljivo je napomenuti da je Hutton primijenio drugo pravilo (ne spominjući da se radi o Heronovoj formuli) i na računanje površine trokuta sa stranicama **13**, **14** i **15** u jednom složenijem primjeru [4, str. 121]:

“Nakon povlačenja linije paralelne stranici **15**, površina nastalog manjeg trokuta je **24**. Traže se duljine svih triju stranica.”

Huttonov način numeričkog računanja površine trokuta sa stranicama **13**, **14** i **15** u tom primjeru može biti sljedeći zadatak za poticanje praktične matematičke kreativnosti učenika:

“Pronađi, bez korištenja džepnog računala, kvadratni korijen iz umnoška **21 · 6 · 7 · 8**.”

Rješenje se omogućuje rastavljanjem brojeva **21** i **6** na faktore: **21 = 3 · 7** i **6 = 3 · 2**. Dobiva se tako novi oblik umnoška:

$$3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8$$

ili

$$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 8.$$

Dodatno sređivanje umnoška dovodi do:

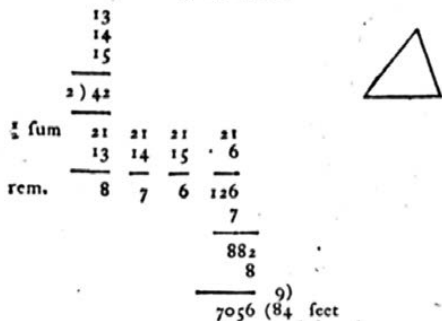
$$3^2 \cdot 7^2 \cdot 16 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 4^2.$$

Iz tog je oblika lako zaključiti da je traženi kvadratni korijen jednak: $3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$.

Kako je *A treatise on Mensuration* bio obimno, složeno i skupo djelo, na traženje mnogih nastavnika i praktičara, 1786. godine napisao je Hutton njegovu kraću i jednostavniju inačicu *The Compendious Measurer* koja bi bila prikladnija za upotrebu u školama i u praksi [5]. U njoj su zadržana oba pravila za nalaženje površine trokuta, ali su primjeri primjene razdvojeni na dvije grupe. U prvoj grupi se u formulaciji daju osnova i visina i primjenjuje se prvo pravilo. U drugoj se grupi u formulaciji daju sve tri stranice i primjenjuje se drugo pravilo. Hutton je, u namjeri da pojednostavni problem nalaženja površine trokuta, izostavio važne i ranije razmatrane slučajeve u kojima se površina jednog te istog trokuta nalazi na dva različita načina.

U slučaju trokuta sa stranicama 13, 14 i 15, Hutton primjenjuje samo drugo pravilo (slika 5).

2. To find the number of square yards in the triangle, whose three sides are 13, 14, 15 feet.



Slika 5. Huttonova numerička konkretizacija drugog pravila za trokut sa stranicama 13, 14 i 15 [5, str. 95]

Huttonov pristup slijedili su mnogi autori udžbenika matematike u XIX. stoljeću. Slijede samo dva ilustrativna primjera. Thomson [6, str. 137] prezentira dva pravila računanja površine trokuta i primjenjuje ih za slučajeve različitih trokuta (slika 6).

RULE 1.—Multiply the base by half the perpendicular height, and the product will be the area.

RULE 2.—If the three sides only are given, add these together, and take half the sum; from the half sum subtract each side separately; multiply the half sum and the three remainders continually together, and the square root of the last product will be the area of the triangle.

Examples.

1. How many square feet in a triangle whose base is 40 feet, and height 30 feet?

40 base.
15 = $\frac{1}{2}$ perpendicular height.

200
40
600 feet. Ans.

2. The base of a triangle is 6.25 chains, and its height 5.20 chains; what is its area?

Ans. 16.25 sq. chains.

3. What is the area of a triangle whose three sides are 13, 14 and 15 feet?

13 + 14 + 15 = 42
and $42 \div 2 = 21 = \frac{1}{2}$ sum.

21 21 21
13 14 15 and $21 \times 6 \times 7 \times 8$
[= 7056

Rem. 8 7 6

Then $\sqrt{7056} = 84$ feet, Ans.

4. The three sides of a triangle are 16, 11 and 10 rods; what is the area? Ans. 54.299 rods.

Slika 6. Thomsonova dva pravila i njihove primjene u zadacima u kojima su poznati različiti podatci o trokutima

Hickie [7, str. 256], na isti način, primjenjuje Huttonovo drugo pravilo za nalaženje površine trokuta sa stranicama 13, 14 i 15 (slika 7).

139. To find the area of a triangle when the three sides are given.

Rule.—From half the sum of the three sides subtract each side severally; multiply the half sum, and the three remainders continually together, and the square root of the product will be the area.

EXAMPLE.

What is the area of a triangle whose three sides are respectively 13, 14, and 15 yards?

13 21 21 21
14 13 14 15
15 8 7 6 remainder.

21 = half sum.

Area = $\sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7056} = 84$ square yards.

Slika 7. Hickijeva numerička konkretizacija pravila za nalaženje površine trokuta sa stranicama 13, 14 i 15

Svi navedeni primjeri nalaženja površine trokuta sa stranicama 13, 14 i 15 mogli su implicitno navesti na pogrešan zaključak da se njegova površina može naći jedino primjenom drugog Huttonova pravila. Pored toga u numeričkoj konkretizaciji pravila izostavljaju se jedinice za duljinu. U dimenzijski korektnom odgovoru za površinu kvadrat jedinice pojavljuje se kao "zec iz mađioničareva šešira"!

Aktualni didaktički pristupi Heronovoj formuli i nalaženju površine trokuta sa stranicama 13, 14 i 15

Heronova se formula sada uobičajeno uvodi bez izvođenja kao algoritamski postupak za nalaženje površine trokuta s poznatim stranicama. Negativne posljedice mogu izazvati neoprezni komentari da je taj obrazac praktičniji, brži i superiorniji od ostalih metoda računanja površine [8, 9]. Mnogo prikladniji su oni pristupi u kojima se Heronova formula prezentira i "provjerava" u slučajevima kada se površina može izračunati i na drukčiji način. Na primjer, Martin [10, str. 69] to pokazuje u slučajevima trokuta sa stranicama (3, 4, 5) i (2, 2, 2).

Posebnu pažnju privlači problematičan tijek učenja koji predlažu Posamantier i Krulik u knjizi "*Efektivne tehnike motiviranja u nastavi matematike*" koja je namijenjena nastavnicima matematike [11]. Počinje se lakim zadatkom nalaženja površine trokuta osnovice 8 i visine 6. Zatim slijedi zahtjevniji zadatak nalaženja površine trokuta sa stranicama 3, 4 i 5. Zadnji zadatak za učenike je nalaženje površine trokuta sa stranicama 13, 14 i 15.

Pedagoška argumentacija za nastavnike je sljedeća:

"Nakon što su pokušali i nisu uspjeli izračunati površinu, učenici moraju shvatiti da treba postojati neka metoda nalaženja površine bilo kojeg trokuta kada su zadane samo tri stranice i čekat će da im se prezentira ta metoda. To vodi direktno do lekcije o Heronovoj formuli za površinu trokuta."

Problematična je *ad hoc* hipoteza da učenici ne mogu samostalno pronaći neki kreativni postupak nalaženja površine trokuta sa stranicama 13, 14 i 15 bez korištenja Heronove formule! Bilo bi poželjno eksperimentalno pokazati neutemeljnost ove hipoteze.

Nasreću postoje autori koji vjeruju u kreativnost učenika više nego Posamantier i Krulik. Kaufmann, na primjer, postavlja sljedeći zadatak [12, str. 103]:

"Objasni kako naći površinu trokuta sa stranicama duljine 7, 13 i 17 centimetara bez korištenja Heronove formule."

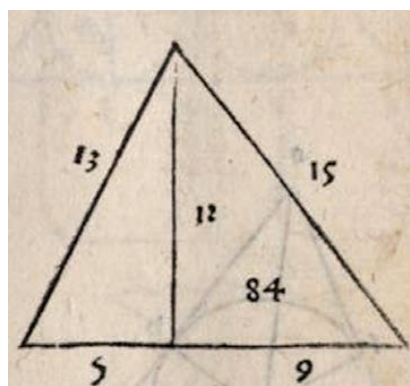
Moguća su dva načina rješavanja. Oba zahtijevaju nalaženje visine na jednu od stranica, bilo dvostrukim korištenjem Pitagorina poučka, bilo upotrebom teorema o kosinusu. Heronova formula može poslužiti za provjeru točnosti rezultata. Jedan problem riješen je na tri načina!

Povijest računanja površine trokuta sa stranicama 13, 14 i 15 vjerojatno je inspirirala Gelfanda i Saula za smišljanje kreativnog izazova za učenike [13, str. 10]:

"Uoči da pravokutni trokuti sa stranicama 5, 12, 13 i 9, 12, 15 imaju jednu katetu koja je jednaka 12. Koristeći se tom činjenicom, nađi površinu trokuta sa stranicama 13, 14 i 15."

Rješenje je sljedeće:

Trokut (13, 14, 15) može se dobiti slaganjem dvaju spomenutih trokuta tako da im se stranice 12 poklapaju (slika 8).



Slika 8. Trokut sa stranicama 13, 14 i 15 je "zbroj" trokuta sa stranicama (5, 12, 13) i (9, 12, 15).

Površina prvog trokuta je 30 ($5 \cdot 6$), a površina drugog je 54 ($9 \cdot 6$). Njihov zbroj jednak je površini trokuta (13, 14, 15): $30 + 54 = 84$.

Pogrešni zadatci u vezi s trokutom (13, 14, 15) mogu biti korisni u promicanju kritičkog mišljenja učenika i u unošenju sumnje kako je sve u matematičkim udžbenicima točno. U tu svrhu može služiti sljedeći primjer [14, str. 4]:

“... Pravokutni trokuti čije su stranice cijeli brojevi nazivaju se Pitagorini trokuti. Na primjer, trokut sa stranicama 3, 4 i 5 je pravokutni Pitagorin trokut.

Zadatak: Pokaži da visina na najdulju stranicu trokuta sa stranicama 13, 14 i 15 dijeli trokut na dva Pitagorina trokuta.”

Od učenika se može tražiti da dokažu kako je autorova tvrdnja u zadatku pogrešna. Naime, trokuti koji se dobiju su (13, 11.2, 6.6) i (14, 11.2, 8.4) i nemaju cjelobrojne stranice. Mogući uzrok ove pogrešne tvrdnje je “pogrešna memorija”. Naime, visina spuštena na stranicu 14 doista dijeli trokut (13, 14, 15) na dva Pitagorina trokuta!

Zaključak

Odnos Heronove formule i nalaženja površine trokuta s cjelobrojnim stranicama u sadašnjim je matematičkim udžbenicima znatno povoljniji nego što je bio u engleskim udžbenicima XIX. stoljeća. Tada je indirektno promovirana pogrešna ideja da je upotreba te formule *jedini način* nalaženja površine trokuta s poznatim stranicama. Sada je međutim popularniji pristup da je to tek jedan komplementarni način. U cilju promicanja kreativnog mišljenja veoma je važno da učenici upoznaju što više mogućih načina nalaženja površine trokuta. Znanje je bogatije i upotrebljivije ako se jedan problem riješi na tri različita načina nego ako se tri različita problema riješe na isti način!

LITERATURA

- 1/ J. Sliško (2023.): Povijest računanja površine trokuta s cjelobrojnim stranicama, *Matematika i škola* 118, str. 103–109.
- 2/ E. Wingate, J. Kersey (1668.): *Mr. Wingate's Arithmetick*, Robert Stepheny.
- 3/ J. Ozanam, M. Montucla, C. Hutton (1803.): *Recreations in Mathematics and Natural Philosophy*, G. Kearsley.
- 4/ C. Hutton (1770.): *A Treatise on Mensuration, both in Theory and Practice*, T. Saint.
- 5/ C. Hutton (1786.): *The Compendious Measurer, being a brief yet comprehensive Treatise on Mensuration, and Practical Geometry*, G. G. J. i J. Robinson.
- 6/ Z. Thomson (1826.): *The youth's assistant in theoretick and practical arithmetic*, David Watson.
- 7/ J. Hickie, (1862.): *Arithmetic: its principles and application*. Simpkin, Marshall, and Company.
- 8/ A. Smith, S. Goldie (2021.): *Edexcel Interantional GCSE (9–1) Mathematics Student Book. Third Edition*, Hachette.
- 9/ S. Chandler, E. Smith, L. Bishop, A. Mothersill, K. Chan-Tack (2020.): *STP Mathematics for CSEC*, Oxford University Press.
- 10/ I. Martin (2009.): *Algebra for college students*, American Mathematical Society.
- 11/ A. S. Posamentier, S. Krulik, (2016.): *Effective Techniques to Motivate Mathematics Instruction*, Routledge.
- 12/ Kaufmann, J. E. (1994.): *Trigonometry*, Second edition, PWS Publishing Company.
- 13/ I. M. Gelfand, M. Saul (2001.): *Trigonometry*, Birkäuser.
- 14/ S. Kalajdziewski (2011.): *Math and art: An introduction to visual mathematics*, CRS Press.