

Igre i kako pobijediti

Ivan Premuš, Čakovec,
Lucija Relić, Virovitica
Matej Vojvodić, Sveta Nedelja

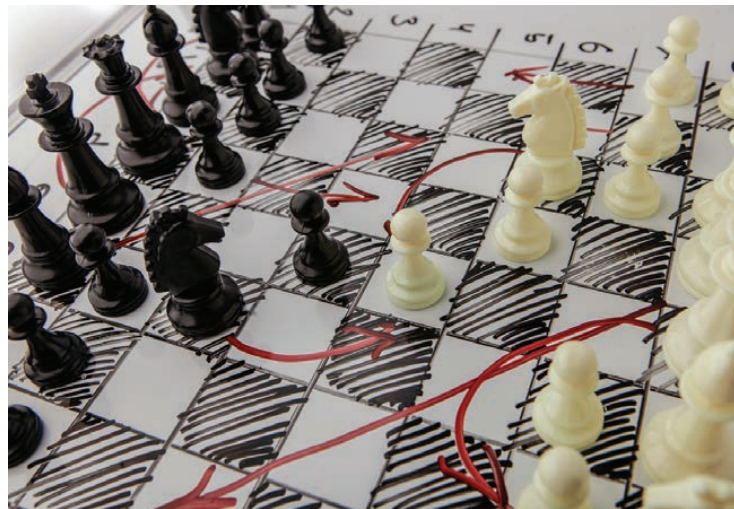
Igra i strategija

Na matematičkim natjecanjima često se pojavljuju zadatci u obliku igre. Struktura takvih zadataka veoma je prepoznatljiva. Navedimo jednu od najjednostavnijih formulacija.

Osoba A i osoba B igraju igru. Oba igrača imaju definiran konačan skup poteza. Kada pojedini igrač dođe na potez, bira jedan od dozvoljenih poteza s ciljem da pobijedi. Pretpostavljamo da su oba igrača savršena logička bića koja uvijek donose odluke koje ih vode k pobjedi, odnosno igraju optimalno. Postavlja se pitanje koji igrač pobjeđuje. Zadatak može tražiti i da sami otkrijemo pobjedničke, tj. optimalne strategije igrača. Napomenimo da ako se igra odigra više puta primjenjujući istu strategiju, ishod igre neće se promijeniti. U nastavku ćemo članka zbog jednostavnosti ovako (ili slično) postavljenu igru zvati matematičkom igrom.

Vjerojatno najpoznatija matematička igra je šah. Jednostavnom provjerom može se vidjeti da zadovoljava gotovo sve postavke navedene formulacije. Jedini zahtjev koji nije zadovoljen jest da se ishod neće promijeniti ako dva igrača igraju igru više puta. Međutim, do promjene ishoda dolazi upravo zbog promjena strategije – najčešće gubitnik mijenja svoju strategiju. Kada bismo dvama robotima dali popis poteza koje trebaju odigrati ovisno o poziciji, tijekom igre uvijek bi bio isti.

Primjeri drugih poznatih matematičkih igara su Go (poznate i kao Igo ili Weigi), Mlin, Potapanje brodova itd. Neke poznate igre kao što su Monopoly, Zmije i ljestve, Čovječe ne ljuti se i Catan **nisu** matematičke igre jer bi se zbog korištenja kocke



ishod pojedine igre mogao promijeniti iako se primjenjuje ista strategija. Za njih također ima smisla definirati strategije, samo što su tada strategije utemeljene na vjerojatnosti određenog ishoda nekog slučajnog procesa, primjerice bacanja kockice. Međutim, takvim se igrama nećemo baviti u ovom članku.

U ranijem članku [2] primijenjena je metoda invarijanti kako bi se pokazalo da u promatranoj igri pobjeđuje određeni igrač, bez obzira na strategiju drugog igrača. Cilj je ovog članka pokazati neke česte ideje prilikom traženja strategija ako se radi o nešto kompliciranijoj igri.

Riječ strategija dolazi od starogrčke riječi *stratēgos* i u doslovnom prijevodu znači "vođenje vojske". S vremenom je izgubljeno to prvobitno značenje, a u matematici se njome koristimo da bi se opisalo postupanje usmjereno prema ostvarivanju određenog cilja. U matematičkim zadacima govorit ćemo o pobjedničkim strategijama. Kao što možemo zaključiti iz naziva, pobjednička strategija predstavlja skup pravila po kojima igrač bira poteze koji ga dovode do sigurne pobjede neovisno o potezima drugog igrača.

Za početak predstaviti ćemo dvije lagane igre kako bismo na njima analizirali strategije.

Primjer 1. Matej i Patricija igraju igru. Najprije Matej na ploču napiše prirodan broj, a zatim Patricija napiše svoj. Ako je umnožak brojeva na ploči paran, pobjeđuje Matej, u suprotnom pobjeđuje Patricija. Tko sigurno može pobijediti?

Rješenje. Jednostavno možemo zaključiti da je odgovor Matej – on može napisati broj 2 (ili bilo koji paran broj), pa će umnožak brojeva na ploči u svakom slučaju biti paran. ■

Strategija koju Matej primjenjuje u ovom slučaju je **konstantna**: ona u obzir ne uzima što bi Patricija mogla igrati. U ovakvom je zadatku najbitniji dio dokazati da je strategija pobjednička bez obzira na to što igra drugi igrač. Kada bismo zamijenili uvjete pobjede igrača, tj. kada bi Matej pobjeđivao ako je na ploči neparan broj, a Patricija ako je na ploči paran broj, pobjednica bi bila Patricija jer u tom slučaju može primijeniti istu strategiju.

Ovakvim strategijama se uglavnom nećemo baviti u ovom članku jer se izrazito mali broj igara može dobiti primjenjujući konstantnu strategiju.



Primjer 2. Matej i Patricija igraju igru. Najprije Matej na ploču napiše prirodan broj, a zatim Patricija napiše svoj. Ako je zbroj brojeva na ploči paran, pobjeđuje Matej, u suprotnom pobjeđuje Patricija. Tko sigurno može pobijediti?

Rješenje. Sada je pak odgovor Patricija, ali njena strategija ovisi o tome što će Matej zapisati.

- Ako Matej napiše paran broj, Patricija mora napisati neki neparan broj.

- Ako Matej napiše neparan broj, Patricija mora napisati neki paran broj.

Poznato je da je zbroj parnog i neparnog broja neparan, pa Patricija može pobijediti u oba slučaja. ■

Budući da je strategija dovoljno jednostavna, umjesto rastavljanja na slučajeve mogli smo jednostavnije reći: "Patricija piše broj suprotne parnosti od Matejevog". Ovo je primjer **reaktivne** strategije jer se strategija velikim dijelom temelji upravo na tome što će napraviti drugi igrač. Većina zadataka u ovom članku zasnivat će se upravo na traženju reaktivne strategije i dokazivanju da je ona pobjednička.

Simetrija

Nakon što smo izgradili osjećaj za pojam strategije na laganim primjerima, promotrimo još neke zahtjevnije primjere u kojima igrač koji ima pobjedničku strategiju mora paziti kako će reagirati na poteze protivnika. Često će nam motivacija za strategiju biti traženje neke simetrije s obzirom na poteze drugog igrača, a najčešće ćemo iskoristiti neku geometrijsku simetriju, poput osne ili centralne simetrije ili neki način sparivanja.

Primjer 3. Na ploči je redom napisano n minusa. Ivan i Hrvoje naizmjenice prepravljaju jedan ili dva susjedna minusa u plus. Pobjednik je onaj igrač koji prepravi posljednji minus. Koji igrač pobjeđuje ako Ivan igra prvi?

Rješenje. Ivan želi prepraviti "sredinu niza". Ako je n neparan, prepravlja srednji minus u plus, a ako je n paran, onda prepravlja dva srednja minusa u plus. Nakon prvog poteza, Ivan zrcali Hrvojeve poteze na suprotnoj strani s obzirom na sredinu niza, što ga dovodi do pobjede.

Jasno se vidi da kako je prvi potez podijelio niz na dvije simetrične polovice, bez obzira na to što Hrvoje odigra, Ivan može osigurati da nakon njegovog poteza niz minuseva i plusseva ostane simetričan. Dakle, igra može stati jedino ako Hrvoje nema što igrati, pa zaključujemo da Ivan pobjeđuje. ■

Kopiranje poteza drugog igrača zbog neke postojeće simetrije u igri i dopuštenim potezima jedan je od najčešćih načina stvaranja reaktivne strategije. Tako će biti i u sljedećem primjeru.

Primjer 4. Aleksandar i Matko naizmjenice postavljaju po jednog skakača na šahovsku ploču. Skakača se ne smije postaviti na već zauzeto polje ili polje koje neki drugi skakač napada, a gubitnik je onaj tko ne može odigrati potez. Koji igrač pobjeđuje ako Aleksandar igra prvi?

Rješenje. Pretpostavimo da je prvi igrač postavio svog skakača na dopušteno polje. Drugi igrač može staviti svog skakača osnosimetrično položaju posljednjeg postavljenog skakača s obzirom na pravac koji leži između 4. i 5. stupca. Sada je drugi igrač taj koji nakon svog poteza održava simetriju ploče!

Ako je prvi igrač postavio svog skakača, možemo garantirati dvije stvari: to je polje bilo slobodno i nije ga napadao niti jedan od ranije postavljenih skakača. Zbog simetrije, polje na koje drugi igrač želi postaviti skakača zasigurno je također prazno i ne napada ga niti jedan od skakača, osim možda upravo postavljenog jer je taj jedini postavljen u međuvremenu. Budući da je stanje na ploči simetrično u odnosu na os simetrije, osnosimetrična polja su u istom redu, a kako skakač sigurno ne napada niti jedno polje u istom redu, drugi igrač sigurno može postaviti skakača na željeno polje.

Dakle, ako Aleksandar može igrati, nakon njega sigurno može igrati i Matko, što znači da Matko pobjeđuje. ■

Zadnji primjer u ovom dijelu članka bavit će se idejom sparivanja i bit će nešto bliži ideji bojenja i popločavanja.

Primjer 5. Ivan i Petar igraju igru na šahovskoj ploči. Najprije Petar stavi skakača na proizvoljno polje, a zatim Ivan i on naizmjenično vuku poteze kao u šahu, ali skakača ne smiju vratiti na već posjećeno polje. Gubitnik je igrač koji ne može odigrati potez. Tko sigurno može pobijediti?

Rješenje. Pobjeđuje Ivan. Na početku igre polja ploče podijeliti će u parove tako da bude moguće

napraviti potez između polja svakog para. Promotrimo jednu moguću podjelu. Najprije dio ploče veličine 2×4 podijelimo na četiri para, a zatim upotrebljavajući kopije te podjele popunimo cijelu ploču kao na slici 1.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	7	8	5	6
9	10	11	12	13	14	15	16
11	12	9	10	15	16	13	14
17	18	19	20	21	22	23	24
19	20	17	18	23	24	21	22
25	26	27	28	29	30	31	32
27	28	25	26	31	32	29	30

Slika 1. Podjela šahovske ploče na parove polja

Nakon što Petar stavi skakača na ploču, prvi Ivanov potez bit će pomicanje skakača na polje sparano s Petrovim početnim poljem. Općenito, kako Petar igra prvi, morat će skakača dovesti na polje neposjećenog para, a Ivan će tada postaviti skakača na preostalo polje tog para. Ivan uvijek na raspolaganju ima taj potez, stoga će Petar ostati bez poteza i izgubiti. ■

Pobjedničke i gubitničke pozicije

Osim traženja konkretne pobjedničke strategije često ima smisla promatrati pobjedničke i gubitničke pozicije. Pozicija je općenito neko stanje igre, npr. položaj figura na ploči, broj i veličina hrpa, brojevi na ploči itd.

Za poziciju kažemo da je pobjednička ako igrač koji je na potezu može u nastavku igre osigurati pobjedu, neovisno o potezima drugog igrača. U suprotnom, pozicija je gubitnička; tada neovisno o potezima igrača na potezu protivnik može osigurati pobjedu. Pozicija je pobjednička ako vodi u barem jednu gubitničku, a gubitnička ako vodi isključivo u pobjedničke pozicije.

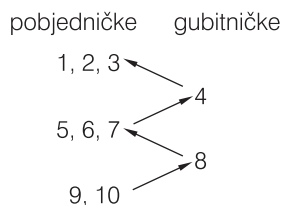
Kako bismo približili ovu ideju, promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 6. Na stolu se nalazi 10 šibica. Ana i Banana sa stola uzimaju 1, 2 ili 3 šibice naizmjenice. Pobjednik je onaj koji uzme zadnju šibicu. Ako Ana igra prva, tko sigurno može pobijediti?



Rješenje. Lako vidimo da ako je na stolu samo 1, 2 ili 3 šibice, pobjeđuje onaj igrač koji je na potezu. Zato su pozicije s 1, 2 i 3 šibice pobjedničke. Jednako tako, lako se vidi da je pozicija sa 4 šibice gubitnička jer svaki potez vodi u pobjedničku poziciju za drugog igrača.

S obzirom na to da je na stolu relativno malo šibica, možemo do kraja raspisati koje su pozicije pobjedničke, a koje gubitničke.



Slika 2.

Vrlo brzo vidimo da Ana dobiva. Konkretno, pozicije s 5, 6 i 7 šibica su ponovno pobjedničke jer je moguće protivnika dovesti u poziciju s 4 šibice koja je gubitnička za njega. Pozicija s 8 šibica je ponovno gubitnička jer vodi samo u pobjedničke, a iz pozicija s 9 i 10 šibica moguće je doći do 8 šibica, pa su zato pobjedničke. Dakle, Ana može pobijediti. ■

Nakon prvih nekoliko slučajeva primjećujemo uzorak koji možemo primijeniti i za općeniti slučaj. Koristeći se indukcijom, možemo dokazati da su pozicije s brojem šibica oblika $4k$ gubitničke pozicije,

a sve ostalo pobjedničke za prvog igrača. Vratimo se na prethodni primjer. Kako 10 nije djeljivo s 4, Ana sigurno može pobijediti.

Igre poput ove, u kojima je na raspolaganju određeni broj objekata, a igrači mogu u jednom potezu ukloniti bilo koji broj objekata između 1 i nekog zadanog maksimuma, nazivaju se Nim. U prošlom smo primjeru, zbog relativno malih brojeva, analizirali pobjedničke i gubitničke pozicije, a da nismo eksplicitno naveli pobjedničku strategiju. Punu ljepotu Nima možemo bolje upoznati na sljedećem primjeru.

Primjer 7. Na stolu se nalazi 100 šibica. Ivan i Tea mogu u jednom potezu uzeti između 1 i 9 šibica sa stola, a poteze vuku naizmjenice. Ako Tea igra prva, tko i kako pobjeđuje pri optimalnoj igri?

Rješenje. Zadatak bismo ponovno mogli riješiti raspisivanjem pobjedničkih i gubitničkih pozicija, no to bi nam, zbog velikih brojeva, uzelo nepotrebno puno vremena. Zato ćemo probati odmah pogoditi strategiju.

Budući da sa stola mogu maknuti između 1 i 9 šibica, tvrdimo da Ivan uvijek može postići da on i Tea zajedno uzmu 10 šibica – ako Tea uzme 1, on će ih uzeti 9, ako Tea uzme 2, on će ih uzeti 8 itd. Konačno, ako Tea uzme 9, Ivan treba uzeti 1. Preciznije, ako Tea uzme x šibica, Ivan mora uzeti $10 - x$, a brzom provjerom vidimo da je broj $10 - x$ u dozvoljenom rasponu.

Dakle, Ivan može postići da nakon njegovog prvog poteza zajedno uzmu 10 šibica. Nakon svakog njegovog sljedećeg poteza zajedno će uzeti još 10 šibica, pa Ivan pobjeđuje u svom desetom potezu jer će tada biti maknuto svih 100 šibica. ■

U sljedećem primjeru neće biti moguće na toliko izravan i lijep način odrediti pobjednika.

Primjer 8. Na stolu se nalazi 20 šibica. Paula i Maja naizmjenice sa stola uzimaju po 2, 3, 5 ili 8 šibica. Gubi ona koja ne može igrati (tj. broj šibica je manji od 2). Ako Paula igra prva, tko sigurno može pobijediti?

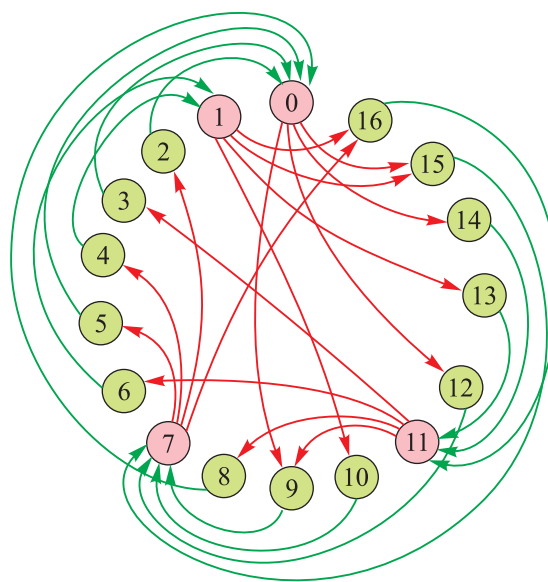
Rješenje. Raspišimo pobjedničke i gubitničke pozicije po broju preostalih šibica:

- Pozicije 0 i 1 su očito gubitničke pozicije za igrača koji je na potezu.
- Pozicije 2, 3, 5 i 8 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 2, 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 0.
- Pozicije 4, 6 i 9 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 1.
- Pozicija 7 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3 ili 5) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (5, 4 ili 2).
- Pozicije 10, 12 i 15 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 7.
- Pozicija 11 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (9, 8, 6 ili 3).
- Pozicije 13, 14, 16 i 19 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 2, 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 11.
- Pozicija 17 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (15, 14, 12 ili 9).
- Pozicija 18 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (16, 15, 13 ili 10).
- Pozicija 20 je pobjednička jer igrač može uzeti 2 šibice i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 18.

Dakle, ako Paula igra prva, pobjeđuje jer je pozicija 20 pobjednička za onog igrača koji je na potezu.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G	G	P	P	P	P	P	G	P	P	P	G	P
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
P	P	P	P	G	G	P	P	P	P	P	G	P
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P	P	G	P	P	P	P	P	G	G	P	P	P

Tablica 1. Pobjedničke (P) i gubitničke (G) pozicije



Slika 3. Graf strategije

Na slici 3 su vrhovi 0, 1, 7 i 11 crveni jer su gubitničke pozicije i iz njih vode crvene strelice u pripadne pobjedničke pozicije. Ostali su vrhovi zeleni jer su pobjedničke pozicije te su zelenim strelicama istaknuti neki mogući potezi koji vode u pripadne gubitničke pozicije.

Dapače, ovim se grafom možemo koristiti i pri prvoj igri jer pokazuje i pobjedničku strategiju, tj. koji potez vodi u gubitničku poziciju za drugog igrača.

Ukratko, ako nije odmah jasno koje su pobjedničke pozicije, korisno je ipak napasti zadatak, pa uz raspis probati uočiti uzorak i zatim ga dokazati.

Ovdje ističemo još jedan primjer. Preporučamo čitatelju da se zadrži na njemu i sam ga pokuša riješiti prije nego što pročita rješenje.

Nije najljepši način, ali radi, samo treba biti uporan. Općenito, brojevi veći od 20 ili 30 trebali bi indicirati da će nam vjerojatno biti potrebna indukcija. Pogledamo li prvih nekoliko pozicija u tablici 1, uočiti ćemo pobjedničke i gubitničke pozicije. Sada bi se uz nešto napora moglo indukcijom pokazati da se pozicije dalje ciklički ponavljaju s periodom 17. Motivirati nas mogu dvije uzastopne gubitničke pozicije, a brzim pregledom vidimo da bi 17 mogao biti period.

Primjer 9. Dvopotezni je šah po svim pravilima jednak običnom šahu, no svaki igrač, umjesto da odigra jedan potez, igra dva. Dakle, najprije bijeli odigra dva poteza, pa crni odigra dva poteza itd. Uz optimalnu igru, koji igrač sigurno ne može izgubiti?

Rješenje. Bijeli ne može izgubiti, a dokaz provodimo kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, tj. da bijeli može izgubiti uz optimalnu igru, pa zato početna pozicija mora biti gubitnička za bijeloga.

Ako je početna pozicija gubitnička, dobivena će pozicija biti pobjednička za crnoga neovisno o prvom (dvostrukom) potezu bijeloga. Sada je kontradikciju najlakše pronaći tako da od svih mogućih načina na koje se mogu odigrati prva dva poteza odaberemo onaj za koji lagano možemo odrediti stavlja li zaista crnoga u pobjedničku poziciju. Pozicija za koju je to najlakše odrediti je početna.

Uzmimo primjerice poteze skakača s B1 na C3, a zatim u drugom potezu nazad s C3 na B1. Razlog za ovakav potez je pustiti crnoga da igra iz početne pozicije.

Po pretpostavci, nakon tih odigranih poteza bijeloga, dobivena pozicija je pobjednička za crnoga. Sada kada je bijeli prepustio potez, uspio je natjerati crnoga da postane onaj koji mora vući poteze iz početne pozicije koja je po pretpostavci gubitnička. Dakle, crni je istovremeno u pobjedničkoj i gubitničkoj poziciji, što je kontradikcija. Zaključujemo da je pretpostavka da je početna pozicija gubitnička lažna, stoga prvi igrač ne može izgubiti. ■

Zadaci za samostalni rad

1. Na stolu se nalazi hrpa od 10 žetona: 2 bijela, 2 crna, 2 crvena, 2 plava i 2 zelena. Šimun i Andrija naizmjenice uzimaju po jedan žeton s hrpe i stavljaju ih na vrhove konveksnog deseterokuta. Šimunov cilj je napraviti niz od 5 žetona svih 5 različitih boja, a Andrija ga u tome ometa. Igru počinje Andrija. Tko sigurno može pobijediti?
2. Na stolu se nalazi n šibica. Lucija i Ivan mogu u jednom potezu uzeti bilo koji broj šibica

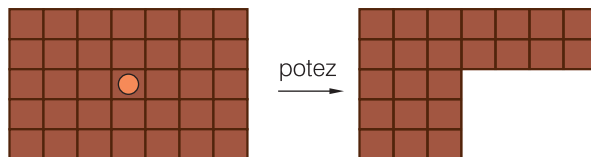
između 1 i k uključivo, s tim da Lucija igra prva. Pobjeđuje igrač koji uzme posljednju šibicu. Odredite kada Ivan pobjeđuje, ovisno o n i k .

3. Na stolu su dvije hrpe žetona veličine n i m . Martin i Mislav igraju naizmjenice, a u jednom potezu mogu uzeti proizvoljan broj žetona s hrpe koju odaberu. Pobjednik je onaj koji uzme zadnji žeton. Ako Martin igra prvi, tko sigurno može pobijediti u ovisnosti o n i m ?
4. Marina i Lucija naizmjenice biraju jedan od brojeva 2, 3, 4, 5 i zapisuju ga na ploču. Lucija počinje prva, a pobjednica je ona koja zapiše zadnji broj takav da je zbroj svih brojeva napisanih na ploči barem n .
 - a) Tko ima pobjedničku strategiju ako je $n = 70$?
 - b) Što ako je $n = 75$?
5. Vlatka i Vlatko igraju igru s pravokutnom pločom i okruglim žetonima istog polumjera. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču tako da se ne preklapa s ostalima i da se u cijelosti nalazi na ploči. Igrač koji više ne može postaviti žeton na ploču gubi. Tko ima pobjedničku strategiju ako Vlatka igra prva?
6. Na stolu se nalaze 1234 kamenčića. Filip i Toma igraju sljedeću igru: najprije Filip uzme neki paran broj kamenčića, najmanje dva, ali ne više od 100, a zatim Toma uzme neki neparan broj kamenčića, najmanje jedan, ali ne više od 99. Potezi se dalje vuku naizmjenično, poštujući iste uvjete. Igrač pobjeđuje ako pokupi sve preostale kamenčiće ili ako drugi igrač ne može odigrati svoj potez. Tko ima pobjedničku strategiju, tj. može pobijediti neovisno o igri drugog igrača?

7. Laura i Mateo na ploču su napisali 2023 uzasatopna prirodna broja počevši od nekog n . Nakon toga naizmjenice brišu po jedan broj s ploče, sve dok na ploči ne ostanu samo dva broja. Laura dobiva ako su preostali brojevi relativno prosti, a Mateo ako imaju zajednički djelitelj veći od 1.

- a) Ako Laura igra prva, tko pobjeđuje?
b) Ako Mateo igra prvi, tko pobjeđuje?
8. U gornjem desnom kutu pravokutne ploče dimenzije $m \times n$ nalazi se kamen. Megi i Francka naizmjenice pomiču kamen proizvoljan broj polja prema dolje ili ulijevo. Pobjeđuje igračica koja kamen pomakne u donji lijevi kut. Ako je Megi prva na potezu, pronađi sve parove (m, n) za koje ona ima pobjedničku strategiju.
9. Na stolu su 42 kamenčića. Dva igrača naizmjenice odigravaju poteze. U svakom potezu igrač treba uzeti najmanje jedan kamenčić, ali ne više od polovine preostalih kamenčića. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na stolu ostane samo jedan kamenčić. Koji igrač sigurno može pobijediti?
10. Mare i Kate naizmjenično zapisuju po jednu znamenku sve dok ne napišu šesteroznamenasti broj, pri čemu se nijedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Mare igra prva, a znamenke se pišu redom slijeva nadesno. Mare pobjeđuje ako je napisani šesteroznamenasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, u suprotnom pobjeđuje Kate. Dokaži da Mare ima pobjedničku strategiju.
11. Zadan je pravilni mnogokut s n vrhova. Ivan i Tea naizmjenice crtaju dijagonale tog mnogokuta, ali gube ako nacrtaju dijagonalu koja siječe neku od već nacrtanih dijagonala (osim u vrhovima). Ako Ivan crta prvi, tko ima pobjedničku strategiju?
12. Mirko i Slavko igraju kartašku igru s $2n$ karata koje su numerirane s $1, 2, \dots, 2n$. Na početku svaki igrač ima n karata. Nakon toga naizmjenice bacaju karte sve dok zbroj bačenih karata ne bude djeljiv s $2n+1$. Ako je zbroj bačenih karata djeljiv s $2n+1$, pobjeđuje zadnja osoba koja je bacila kartu. Tko ima pobjedničku strategiju ako Slavko igra prvi?
13. Matej i Jakov igraju igru s čokoladom oblika pravokutnika dimenzija $m \times n$ koja se sastoji od jediničnih kvadratića. Igrači naizmjenice biraju jedan od preostalih kvadratića te odlome

(i pojedu) taj i sve kvadratiće koji se nalaze u istom redu desno i u istom stupcu niže od odabranog, kao i sve one koji su time ostali odvojeni od ostatka čokolade. Pobjeđuje igrač koji ostavi samo jedan kvadratić, tj. onaj u gornjem lijevom kutu. Ako Matej igra prvi, za koje veličine čokolada pobjeđuje Jakov?



Slika 4. Primjer jednog mogućeg prvog poteza na čokoladi dimenzija 5×7

Upute

- Potražite strategiju pomoću simetrije.
- Ovo je generalizirani primjer Nima – razmislite koje su gubitničke, a koje pobjedničke pozicije.
- Što ako su n i m jednaki? Što ako nisu?
- Koji zbroj Marina sigurno može postići svojim potezom?
- Pobjednička strategija koristi neku simetriju.
- Ovo je ponovno Nim.
- U oba slučaja pobjeđuje onaj tko igra prvi.
- Tko pobjeđuje za $n \times n$ ploču?
- Analizirajte pobjedničke i gubitničke pozicije.
- Što ne smije biti zadnja znamenka?
- Isprobajte igru na malim primjerima.
- Ako Slavko može postići da Mirko ne može pobijediti u sljedećem potezu, tada i Mirko može postići da Slavko ne može pobijediti u sljedećem potezu.
- Prisjetimo se primjera 9.

Rješenja

1. Pobjeđuje Šimun. U svakom svom potezu on stavlja žeton iste boje kao i Andrija na nasuprotni vrh deseterokuta.
2. Vidimo da su pozicije od 1 do k pobjedničke za Luciju, pa je zato pozicija $k + 1$ očito gubitnička. Indukcijom proširujemo gubitničke pozicije na sve oblika $l(k + 1)$, $\forall l \in \mathbb{N}$, a sve ostale pozicije su pobjedničke. Dakle, ako je n djeljiv s $k + 1$ pobjeđuje Ivan, tako da nakon svakog Lucijina poteza makne onoliko šibica koliko treba da u zbroju s Lucijinim potezom makne ukupno $k + 1$ šibicu. Ako n nije djeljiv s $k + 1$, pobjeđuje Lucija tako da najprije uzme onoliko šibica koliki je ostatak koji daje n pri dijeljenju s $k + 1$, a onda rabi istu strategiju koju je Ivan imao u prethodnom slučaju.
3. Ako je $n = m$, pobjeđuje Mislav jer može samo kopirati Martinove poteze. Ako je $n \neq m$, tada Martin u prvom potezu iz veće hrpe uzme točno onoliko žetona koliko treba da hrpe budu jednakobrojne, pa zatim on kopira Mislavove poteze.
4. Marina može postići da zbroj njenog broja i prethodnog Lucijina broja bude 7. Na taj će način postići da nakon svakog njenog poteza zbroj svih brojeva bude djeljiv sa 7. Dakle, ako je $n = 70$, tada dobiva Marina jer je 70 djeljivo sa 7. Za $n = 75$ dobiva Lucija jer u prvom potezu zapiše 5 i dolazi u poziciju kad je $n = 70$.
5. Vlatka ima pobjedničku strategiju. Prvi žeton stavlja na sredinu, a dalje centralno-simetrično zrcali Vlatkove poteze.
6. Školsko natjecanje 2012., 4. razred, A varijanta, 8. zadatak.
7. U oba slučaja pobjeđuje igrač koji igra prvi.
 - a) Ako Laura igra prva, u prvom potezu briše najmanji broj, a ostale brojeve dijeli u parove uzastopnih brojeva. Zašto? Primijetimo da su dva uzastopna prirodna broja sigurno relativno prosta. Dakle, Lauri je dovoljno da na kraju ostane bilo koji od takvih parova brojeva. Zaista, to može lako učiniti tako da nakon svakog Mateova poteza obriše onaj drugi broj iz istog para u kojem se nalazio taj broj.
 - b) Uzmimo sada da Mateo igra prvi. Uočimo da je situacija jednostavna ako je početni broj n paran. U tom slučaju Mateo briše neparne brojeve dok god ih ima jer čak i ako Laura briše samo parne, na kraju će ostati dva parna broja. Opisat ćemo Mateovu pobjedničku strategiju koja ne ovisi o parnosti broja n . Neka je njegov prvi potez obrisati najmanji broj na ploči. Tada se među preostalim brojevima nalazi po 1011 parnih i neparnih brojeva. Ako ostanu dva parna broja, Mateo sigurno pobjeđuje, pa stoga Mateo briše neparne brojeve. Zbog toga Laura, da spriječi takav razvoj događaja, mora brisati isključivo parne brojeve (čim obriše jedan neparan, a Mateo dalje briše samo neparne, ostat će dva parna broja na kraju). Dakle, prije no što Laura odigra zadnji potez, ostat će dva parna i dva neparna broja. Laura je opet prisiljena obrisati paran broj jer inače Mateo može ostaviti dva parna broja na ploči. Također, Mateo želi da ta dva neparna broja ne budu relativno prosti i to Mateo zaista može osigurati jer je na početku na ploči dovoljno brojeva. Mateo može obrisati sve neparne brojeve, osim neka dva koja su djeljiva s 3, a uz njih su prije posljednjeg Laurina poteza na ploči i još dva parna broja. Zaključujemo da Mateo ima pobjedničku strategiju jer može u zadnjem potezu obrisati broj iste parnosti kao i Laura i na ploči ostaviti ili dva parna broja ili dva broja djeljiva s 3.
8. Ako je ploča kvadratna, pobjeđuje Franka. Za svaki Megin pomak kamena prema dolje za x , Franka ga u svom potezu pomakne x polja ulijevo. Za svaki Megin pomak kamena ulijevo, Franka ga pomakne jednak broj polja prema dolje. Drugim riječima, ona "poništava" Megin poteze vraćajući kamen na dijagonalu.

Ako ploča nije kvadratna, pobjeđuje Megi tako da u prvom potezu poziciju svede na kvadratnu ploču, a onda dalje igra tako da vraća kamen na dijagonalu te nove kvadratne ploče.

9. Županijsko natjecanje 2019., 1. razred, A varijanta, 5. zadatak.
10. Državno natjecanje 2009., 1. razred, A varijanta, 5. zadatak.
11. U ovom zadatku zapravo nije trebalo naći strategiju jer igra završava kada se dobije triangulacija. Ukupan broj poteza u igri je $n - 3$ jer je za triangulaciju uvijek potrebno točno $n - 3$ dužina. Iz toga slijedi da za parne n dobiva Ivan, a za neparne n dobiva Tea.
12. Mirko ima pobjedničku strategiju. Dokazat ćemo da nakon svakog Slavkova poteza Mirko može završiti igru ili postići da Slavko ne može završiti igru u sljedećem potezu. Pretpostavimo da je Mirku u nekom trenutku ostalo $k - 1$ karata, a Slavku k karata, te neka zbroj karata na stolu daje ostatak j pri dijeljenju s $2n + 1$. Ako Slavko ima broj $2n + 1 - j$ među svojim kartama, može to odigrati i pobijediti. Ako nema tu kartu, ima jednu kartu više od Slavka. Za svaku Slavkovu kartu K , najviše je jedna Mirkova karta takva da će Slavko nakon Mirkova poteza pobijediti bacanjem karte K . To znači da Mirko ima barem jednu kartu koju može odigrati, a da Slavko ne može

pobijediti u sljedećem potezu. Budući da svi znaju koje su karte preostale i koje su bačene, Mirko zna koju kartu treba baciti. Dakle, Mirko ima pobjedničku strategiju.

13. Pretpostavimo najprije da je dimenzija čokolade 1×1 . U tom slučaju očito gubi Matej.

Pretpostavimo sada da je barem jedan od brojeva m, n veći od 1 i da ponovno gubi Matej. Tada on gubi i ako odlomi samo kvadratić u desnom donjem kutu. Očito Matej nije izgubio u prvom potezu. Nakon što Jakov odigra svoj potez, komad preostale čokolade mogao je ostati i odmah nakon Matejeva poteza jer će donji desni kvadratić biti pojeden bez obzira na to koji kvadratić izabrali. Stoga je Jakov u gubitničkoj poziciji, no to je nemoguće jer barem jedan igrač mora pobijediti u igri. Dakle, Matej uvijek ima pobjedničku strategiju.

LITERATURA

- 1/ Matija Bašić (2020.): *AHA! Putovanje u središte problema*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb.
- 2/ Maja Drmač (2021.): *Metoda invarijanti*, *Matematika i škola*, 113, Element, Zagreb.
- 3/ MNM zbirka predavanja, <https://www.skoljka.org/folder/778/mnm-predavanja-subotom/>.