

Više raznih rješenja jednog zadatka iz geometrije

Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

U spomen dragom prijatelju i kolegi Šefketu Arslanagiću (1942. – 2023.)

U ovom radu dajemo četiri rješenja sljedećeg geometrijskog zadatka:

Zadatak. Kružnica upisana u trokut ABC dodiruje stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u točkama D , E i F tako da vrijedi

$$|AC| \cdot |BC| = 2 \cdot |AD| \cdot |DB|.$$

Odredi veličinu kuta $\angle ACB$.

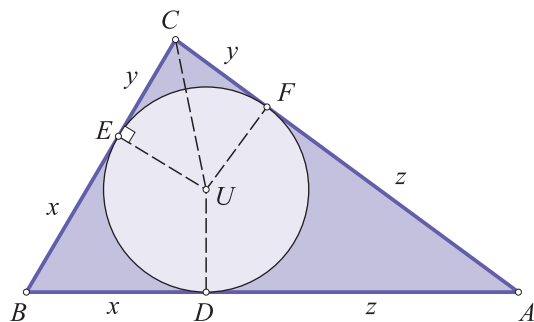
Rješenje 1.

Neka je $x = |BD| = |BE|$, $y = |CE| = |CF|$, $z = |AF| = |AD|$. Ove jednakosti slijede iz sljedećih sukladnosti:

$$\begin{aligned}\triangle BDU &\cong \triangle BEU, & \triangle CEU &\cong \triangle CFU, \\ \triangle ADU &\cong \triangle AFU.\end{aligned}$$

Stoga (vidi sliku 1) vrijedi:

$$\begin{aligned}|AB| &= c = x + z, & |BC| &= a = x + y, \\ |AC| &= b = z + y.\end{aligned}$$



Slika 1.

Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

Uvjet iz zadatka glasi

$$\begin{aligned}a \cdot b &= 2 \cdot z \cdot x \iff (x+y)(z+y) = 2zx \\ &\iff y^2 + (x+z)y - xz = 0 \\ &\iff y^2 + cy - xz = 0\end{aligned}$$

i rješenje ove kvadratne jednadžbe je

$$y = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4xz}}{2} = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2ab}}{2}.$$

(Zašto je samo znak + ispred korijena?)

Sada imamo:

$$\begin{aligned}a + b + c &= x + y + z + y + x + z \\ &= 2(x+z) + 2y = 2c + 2y \\ &= 2c - c + \sqrt{c^2 + 2ab} \\ &\iff a + b = \sqrt{c^2 + 2ab} \\ &\iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \\ &\iff a^2 + b^2 = c^2\end{aligned}$$

i prema obratu Pitagorina poučka slijedi da je $\angle ACB = 90^\circ$. ■

Rješenje 2.

Sa slike 1 vidimo da za opseg trokuta ABC (označen s $2s$) vrijedi

$$2s = 2x + 2y + 2z.$$

Oдавde dobivamo

$$\begin{aligned}x = |BD| &= \frac{2(s - (y+z))}{2} \\ &= s - (y+z) = s - b\end{aligned}$$

i slično $z = |AD| = s - a$ pa sada uvjet glasi

$$ba = 2(s - a)(s - b).$$

S druge strane, vrijedi da je

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}.$$

Dokazat ćemo posljednju jednakost.

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \cos \gamma}{2} = \frac{2ab - 2ab \cos \gamma}{2 \cdot 2ab}$$

(primijeni kosinusev poučak)

$$\begin{aligned} &= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{4ab} = \frac{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{4ab} \\ &= \frac{c^2 - (a - b)^2}{4ab} = \frac{(c - a + b)(c + a - b)}{4ab} \\ &= \frac{(2s - 2a)(2s - 2b)}{4ab} = \frac{(s - a)(s - b)}{ab}, \text{ tj.} \\ \sin \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}. \end{aligned}$$

Konačno dobivamo

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{ba}{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tj. $\frac{\gamma}{2} = 45^\circ$, pa je $\gamma = 90^\circ$. ■

Rješenje 3. Imamo da je $|AD| = s - a$ i $|BD| = s - b$ pa je

$$\begin{aligned} ab &= 2(s - a)(s - b) \\ \Leftrightarrow ab &= 2s^2 - 2(a + b)s + 2ab \\ \Leftrightarrow ab &= 2s(a + b - s) \\ \Leftrightarrow ab &= 2s \cdot \frac{1}{2}(a + b - c) \\ \Leftrightarrow ab &= s(a + b - c). \end{aligned}$$

Iz formule za površinu trokuta ABC :

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

izrazimo ab i uvrstimo u gornju jednakost:

$$\frac{2P}{\sin \gamma} = s \cdot (a + b - c),$$

a zbog $P = rs$, dalje vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot r \cdot s}{\sin \gamma} &= s \cdot (2s - 2c) \\ \sin \gamma &= \frac{r}{s - c}. \end{aligned}$$

U pravokutnom trokutu UEC (vidi sliku 1) je

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{|UE|}{|EC|} = \frac{r}{s - c}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\ 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} &= \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \\ \cos^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2} \\ \gamma &= 90^\circ. \end{aligned}$$

■

Rješenje 4. Pogledajmo sliku 1. Odredimo razliku

$$\begin{aligned} |AC| - |BC| &= |AF| + |FC| - (|CE| + |EB|) \\ &= |AF| + |FC| - |CE| - |EB| \\ \Leftrightarrow |AC| - |BC| &= |AD| - |BD|. \end{aligned}$$

Kvadriranjem posljednje jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} |AC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| + |BC|^2 \\ &= |AD|^2 - 2|AD| \cdot |BD| + |BD|^2 \end{aligned}$$

pa je dalje zbog uvjeta zadatka

$$\begin{aligned} |AC| \cdot |BC| &= 2 \cdot |AD| \cdot |DB| \\ |AC|^2 - 4|AD| \cdot |DB| + |BC|^2 \\ &= |AD|^2 - 2|AD| \cdot |BD| + |BD|^2 \\ \Leftrightarrow |AC|^2 + |BC|^2 \\ &= |AD|^2 + 2 \cdot |AD| \cdot |BD| + |BD|^2 \\ \Leftrightarrow |AC|^2 + |BC|^2 &= (|AD| + |BD|)^2 \\ \Leftrightarrow |AC|^2 + |BC|^2 &= |AB|^2, \end{aligned}$$

jer je $|AD| + |BD| = |AB|$.

Zato je prema obratu Pitagorina poučka $\gamma = 90^\circ$. ■