

Geometrija zastava

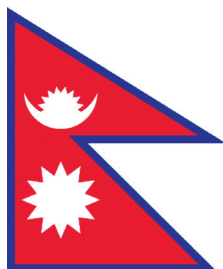
1. dio

Franka Miriam Brueckler, Zagreb



Dok smo se u prethodnim nastavcima bavili temama koje su neposredno vezane za sam čin putovanja – vremenom i pozicijom gdje se nalazimo tijekom puta – u ovom i sljedećih nekoliko nastavaka zanimat će nas više “turistička” perspektiva putovanja. Mnogi od nas putuju po raznim državama. Iako i sam prikaz pojedine države na zemljopisnoj karti ima mnoge zanimljive matematičke aspekte – o tome ćemo jednom u budućnosti – najočiglednija veza između pojedinih država i matematike su zastave. U sljedećih nekoliko nastavaka pozabavit ćemo se njihovim formatima te geometrijom i simetrijama uzoraka na njima.

Velika većina modernih država i autonomnih teritorija ima zastave oblika pravokutnika. Iznimka je zastava Nepala (slika 1). Nju neki nazivaju “najmatematičijom zastavom na svijetu” i o njoj je detaljno pisala Tanja Debelec u Miš-u broj 108.



Slika 1. Državna zastava Nepala jedina je nepravokutna zastava neke moderne države na svijetu (slika preuzeta s Wikipedije, *public domain*)

Dvije države ne samo da imaju pravokutnu zastavu, nego im je zastava štoviše kvadratna: Švicarska i Vatikan (slika 2).



Slika 2. Zastave Vatikana i Švicarske su jedine državne zastave kvadratnog formata (slike preuzete s Wikipedije, *public domain*)

Ostale države imaju pravokutne zastave koje nisu oblika kvadrata, ali nisu ni sve međusobno slični pravokutnici. Česti omjeri duljina kraće prema dužoj stranici državne zastave su $1 : 2$ (primjerice, Hrvatska), $3 : 5$ (primjerice, zastava Njemačke) i,



Slika 3. Primjeri pravokutnih zastava koje nisu međusobno slični pravokutnici: Hrvatska, Njemačka, Turska (slike preuzete s Wikipedije, *public domain*)

najčešći omjer, $2 : 3$ (primjerice, zastava Turske), vidi sliku 3. Od ostalih omjera, susreću se i $3 : 4$ (Demokratska Republika Kongo, Papua Nova Gvineja, San Marino), $4 : 5$ (Monako), $4 : 7$ (Iran, Meksiko), $5 : 7$ (Albanija, Kosovo), $5 : 8$ (Argentina, Gvatemala, Palau, Poljska, Švedska), $6 : 7$ (Niger), $7 : 10$ (Andora, Brazil), $7 : 11$ (Estonija), $8 : 11$ (Farski Otoci, Izrael, Norveška), $10 : 17$ (Zelenortska Republika), $10 : 19$ (Američka Samoa, Mikronezija, Liberija, Marshallovi Otoci, SAD), $11 : 18$ (Finska), $11 : 20$ (Paragvaj), $11 : 28$ (Katar), $13 : 15$ (Belgija), $15 : 22$ (Bolivija), $16 : 25$ (Kambodža), $17 : 26$ (Åland), $18 : 25$ (Island), $22 : 41$ (Guam), $28 : 37$ (Danska), $189 : 335$ (El Salvador), te omjer zlatnog reza $1 : \phi$ (Togo).



Slika 4. Zastava Toga jedina je zastava čiji omjer duljina stranica jest omjer zlatnog reza (slika preuzeta s Wikipedije, *public domain*)

Kao što vidimo, svi omjeri duljina stranica zastava su omjeri prirodnih brojeva, iznimka je zastava Toga (slika 4), koja se koristi omjerom zlatnog reza. Konstrukcije tog omjera s pomoću ravnala i šestara dobro su poznate (a i raznolike), a ovdje ćemo predstaviti drugi, podjednako "čisto matematički" način njegove konstrukcije, a to je savijanjem papira, temeljenom na aksiomima origamija. Precizirajmo pritom zadatak koji želimo riješiti:

Zadatak. Na raspolaganju je list papira A-formata kojemu je dakle omjer duljina stranica $1 : \sqrt{2}$. Iz tog lista papira želimo jednim ravnim rezom, okomitim na jednu od stranica papira izrezati pravokutnik kojemu je omjer duljina stranica prikladan za odabranu zastavu. Zadatak je odrediti poziciju reza koristeći se isključivo savijanjem papira, bez računanja i pomagala.¹

U ovom nastavku opisat ćemo rješenje za zlatni rez, tj. zastavu Toga, a u sljedećem ćemo vidjeti kako odrediti poziciju reza za bilo koji od cjelobrojnih omjera.

Prvo uočimo: Ako je omjer duljina kraće prema dužjoj stranici zastave *manji* od $1 : \sqrt{2}$, format zastave je "duguljastiji" ("uži") od A-formata. Za sve takve slučajeve uvodimo pretkorak: Raspolovimo naš list papira rezom paralelnim dužjoj stranici.

Prisjetimo se, omjer zlatnog reza ϕ definiran je razmjerom

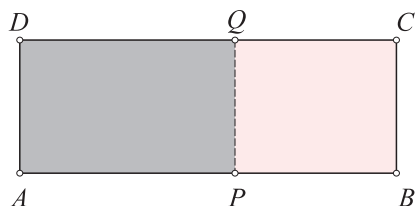
$$\phi : 1 = 1 : (\phi - 1)$$

i može se dokazati (ostavimo dokaz za domaću zadaću) da je $\phi > \sqrt{2}$, odnosno

$$1 : \phi < 1 : \sqrt{2},$$

dakle za zastavu Toga moramo provesti navedeni pretkorak. Time nam preostaje list papira formata $1 : 2\sqrt{2}$ i na njemu tražimo poziciju točaka P i Q , tj. poziciju reza tako da nam preostane zlatni pravokutnik (slika 5).

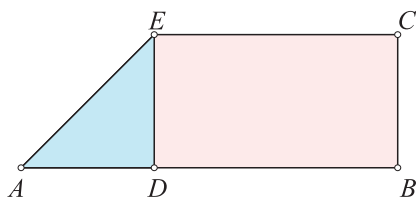
¹ Taj uvjet se u osnovi svodi na to da je dozvoljeno korištenje samo Huzita-Hatori-Justinovih aksioma origamija. Poznato je da su sve konstrukcije ravnalom i šestarom provedive i u tom sustavu aksioma, ali i neke koje nisu provedive ravnalom i šestarom.



Slika 5. Iz pola lista A-formata želimo dobiti sivi zlatni pravokutnik

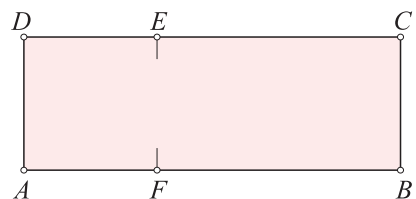
Držite papir tako da mu je dulja stranica horizontalna, kao na slici 5. Zatim provedite sljedeće korake:

- Vrh D spustite na stranicu AB (slika 6) tako da odredite poziciju točke E . Budući da ne želite nepotrebne linije pregiba unutar buduće zastave, nemojte “zapeglati” pregib AE , nego samo na poziciji od E lagano “uštignite” papir.



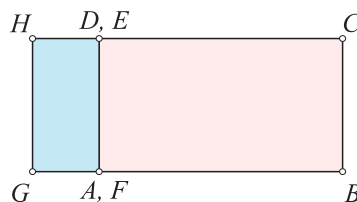
Slika 6. Prvi korak konstrukcije zlatnog pravokutnika

- Otvorite papir i ponovite tako da spustite A na stranicu CD i tako odredite poziciju točke F . Sad pred sobom imate papir izgleda kao na slici 7. Uočite: $AFED$ je kvadrat.

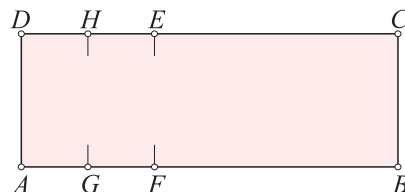


Slika 7. Drugi korak konstrukcije zlatnog pravokutnika

- Preklopite A na F i D na E tako da odredite polovišta G i H dužina AF i DE (slika 8). Pozicije G i H , poput onih od E i F samo označite, nemojte savijati spojnicu GH . Otvorite papir – sad imate stanje kao na slici 9.

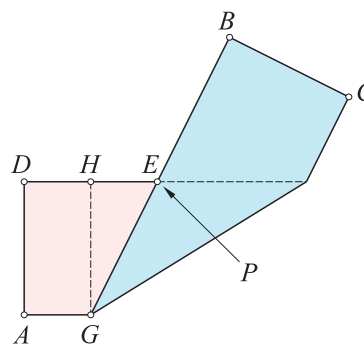


Slika 8. Treći korak konstrukcije zlatnog pravokutnika



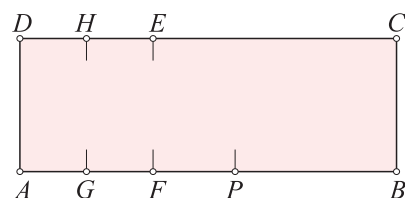
Slika 9. Stanje nakon prva tri koraka konstrukcije

- Podignite papir u vrhu B pridržavajući ga u točki G . Kad nađete poziciju GB koja prolazi točno kroz točku E , označite tu poziciju (opet “štignjem”) na GB (slika 10). To će biti točka P .

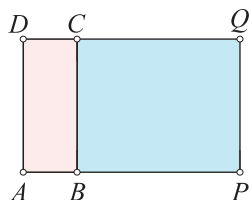


Slika 10. Četvrti korak konstrukcije zlatnog pravokutnika

- Otvorite papir (slika 11) pa ga savijte tako da B padne na AB , C padne na CD i pritom da pregib prolazi kroz P (slika 12). Ovaj put čvrsto pritisnite pregib – to je tražena spojnica PQ sa slike 5.



Slika 11. Stanje nakon četvrtog koraka konstrukcije



Slika 12. Zadnji korak konstrukcije

Ako sad prerežete papir duž PQ , preostao vam je pravokutnik formata zastave Toga. Nakon što sljedeći put vidimo kako dobiti i ostale formate, pozabavit ćemo se geometrijskim konstrukcijama dekoracija nekih zastava te njihovim simetrijama.

LITERATURA

- 1/ Tanja Debelec (2021.): Međupredmetno povezivanje matematike i geografije, *Matematika i škola* 108, 127–130.
- 2/ George Markowsky (1991.): Making a Golden Rectangle by Paper Folding, *The Mathematical Gazette* 75, 85–87.
- 3/ OMG: National Flag of Nepal – Maths Behind world's unique flag <https://omgnepal.com/the-amazing-national-flag-of-nepal-maths-behind-the-worlds-unique-flag/> (pristupljeno 20. 5. 2023.)
- 4/ Wikipedia: List of Aspect Ratios of National Flags https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_aspect_ratios_of_national_flags (pristupljeno 20. 5. 2023.)

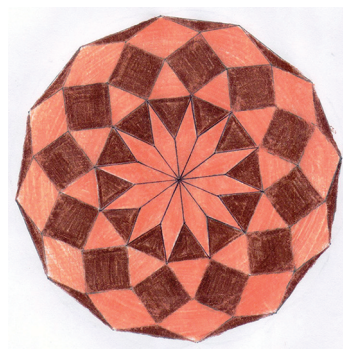
uz panoptikum

Mjesec matematike u znaku šarenih rozeta

Povezujući aktualno matematičko gradivo o kružnici i krugu s danom broja π , učenici osmih razreda u Pleškovcu dobili su zadatak da konstrukcijom cvijeta s 12 latica u kružnici nacrtaju rozete. Rozeta (franc. *rosette* – ružica) okrugao je ornament u obliku ruže ili okrugao prozor s različitim ukrasima, obično na pročeljima gotičkih crkvi.

Uz matematička znanja i vještine učenicima je bila potrebna upornost, preciznost, koncentracija i strpljivost u radu kako bi došli do što kvalitetnijeg i lijepo obojenog rada. Na početku je bilo puno pitanja te mnoštvo problema i nejasnoća, ali na kraju su svi učenici uspješno napravili svoje rozete. Ova se aktivnost izvodila u vrijeme polaganja nacionalnih ispita, pa im je dobro došao opuštajući blok-sat, uz konstruiranje, bojenje i glazbu.

Ideja za ovaj rad proistekla je iz radionice pod naslovom *Rozeta i matematika* koju su na osječkom državnom skupu u veljači ove godine održale Željka Hanžek, prof. i Mara Grašić, dipl. uč.



Lana Dragojević

Željko Kraljić, učitelj izvrsni savjetnik, OŠ Ivana Gorana Kovačića, Sveti Juraj na Bregu, zeljac.kraljic@gmail.com