Descartesova metoda – problemi i jednadžbe

Zdravko Kurnik

Rješavanje jednadžbi ubraja se u najčešće postupke u nastavi matematike, a osnovno pitanje je određivanje metoda rješavanja. Mnogo su složenije situacije u kojima se problemi tek trebaju svesti na rješavanje jednadžbi i to tako da se uvjeti u njima, iskazani riječima, izraze matematičkim simbolima, tj. prevedu na matematički jezik.

Pitanjem toga prevođenja prvi se sustavno bavio veliki francuski matematičar, fizičar i filozof René Descartes (1596. – 1650.) u svom traganju za univerzalnom metodom rješavanja problema. Rezultat toga traganja je njegovo djelo "Praktična i jasna pravila za vođenje uma u istraživanju istine", klasično djelo logike otkrivanja istina u znanostima. Prema Descartesu sve su znanosti međusobno povezane. Veza koja ih spaja jest čovjekov um. Djelo se sastoji od 21 pravila i objašnjenja uz njih 18. Pronađeno je među njegovim rukopisima i objavljeno poslije njegove smrti (1667.). Kako su nastajala pravila, možda nam najbolje kažu sljedeće riječi samoga Descartesa: "Kada sam kao mladić slušao o dosjetljivim pronalascima, pokušao sam pronalaziti sam, ne čitajući autora. Postupajući tako, malo po malo opažao sam da upotrebljavam izvjesna pravila." Ta pravila čine metodu rješavanja problema koja se danas naziva *Descartesova metoda*. Shema u grubim crtama izgleda ovako:

1. zadaća bilo koje vrste svodi se na matematičku zadaću;

2. matematička zadaća bilo koje vrste svodi se na algebarsku zadaću;

3. bilo koja algebarska zadaća svodi se na rješavanje jedinstvene jednadžbe.

Descartes je i sam uvidio da ova shema nije uvijek uporabljiva, odnosno da univerzalna metoda nije ostvarljiva. Postoje problemi u mnogim područjima, pa i u samoj matematici, koji se ne mogu svesti na rješavanje jedinstvene jednadžbe. Univerzalna metoda rješavanja problema nije ostvarljiva. To je danas jasno svakom učeniku s dobrim znanjem matematike. Vjerojatno je ta spoznaja utjecala na Descartesa da "Pravila" ostavi nedovršenima. Međutim, iako pri ostvarenju Descartesove univerzalne zamisli često nastupaju nepredviđene i nepremostive teškoće, zamisao sadrži u sebi duboku pravilnost i znatno je utjecala na znanost. Znanstvenici se danas u svojim istraživanjima u punoj mjeri pridržavaju Descartesovih pravila. Osim toga, postoji mnoštvo problema za koje je Descartesova metoda primjenjiva. Posebno se to odnosi na konstruktivne zadatke, gdje je primjena Descartesove ili algebarske metode često zadnja mogućnost uspješnog rješavanja, i tekstualne zadatke u školskoj matematici.

Evo bitnih značajki Descartesovih pravila koja se odnose na matematičke zadatke:

a) razumijevanje zadatka, uočavanje danih i nepoznatih objekata i veličina, uočavanje uvjeta, svođenje zadatka na nalaženje nekih nepoznatih veličina;

b) proučavanje zadatka najprirodnijim putem – dopuštajući da je on riješen, zorno predočavanje svih odnosa među danim i nepoznatim veličinama u odgovarajućem redoslijedu i u skladu s uvjetima;

c) izdvajanje dijela uvjeta koji omogućuju izražavanje jedne veličine na dva različita načina, sastavljanje jednadžbe koja povezuje nepoznate veličine, raščlanjivanje uvjeta na toliko dijelova i sastavljanje toliko jednadžbi koliko ima nepoznatih veličina;

d) svođenje sustava jednadžbi na jedinstvenu jednadžbu.

Na žalost, kod Descartesa nema općih uputa za svođenje problema na rješavanje jednadžbi. Uspješnost u rješavanju takvih problema postiže se trudom i vježbanjem. U mnogim slučajevima tekst zadatka prirodno se rastavlja na dijelove, a svaki se od tih dijelova odmah može napisati matematičkim simbolima. U složenijim slučajevima uvjet se sastoji od dijelova koji se ne mogu odmah prevesti na matematički jezik, pa se možda najprije mora izvršiti izvjesna preinaka uvjeta.

Školski tekstualni zadaci su takvi da broj poznatih veličina, nepoznatih veličina i uvjeta gotovo uvijek omogućuje dobivanje rješenja. Oni obično teku prirodno i prema očekivanjima. Zašto takvi zadaci ipak često zadaju dosta teškoća i učenicima i nastavnicima, pa ih neki nastavnici izbjegavaju? To nije teško objasniti, a objašnjenje dobrim dijelom leži u naravi samih zadataka. Svaki takav zadatak sastoji se zapravo od dva zadatka: sastavljanja jednadžbi prevođenjem s običnog jezika na matematički jezik i rješavanja jednadžbi. Prvi od njih nije uvijek lagan, zahtijeva priličan umni napor i poznavanje postupka raščlanjivanja, što se nerijetko pretpostavlja da učenici znaju i bez objašnjenja. Odatle teškoće, a rezultat je najčešće odbojnost prema takvim problemima. Međutim, svođenje problema na rješavanje jednadžbi višestruko je korisno jer ono omogućuje razvijanje logičkog mišljenja, dosjetljivosti, opažanja i umijeća samostalnog provođenja nevelikih istraživanja. Zato takve probleme nije dobro izbjegavati, već ih treba metodički primjereno objašnjavati, kako bi oni ispunili svoju obrazovnu svrhu.

U procesu svođenja problema na rješavanje jednadžbi važnu ulogu igraju pitanja koje nastavnik postavlja učenicima. S jedne strane, pomoću njih nastavnik provjerava jesu li učenici razumjeli problem i znaju li opisati i izdvojiti sve njegove značajke, a s druge strane, pobuđuje njihovo mišljenje i usmjerava njihovu misao na bitne dijelove problema. Umijeće postavljanja pitanja jedan je od oblika nastavnikove kreativnosti i zato ga treba njegovati i razvijati. Neka se pitanja stalno ponavljaju, ali su važna i nezaobilazna, pa nas to ne treba smetati. Sigurno su i naši čitatelji često postavljali neka od pitanja koja navodimo niže.

Pitanja koja se odnose na razumijevanje zadatka:

Što je zadano? Što je nepoznato? Što treba naći? Što se zahtijeva? Koliko ima nepoznanica? Kako ćeš označiti nepoznato? Kako glasi uvjet? Od koliko se dijelova sastoji uvjet? Možeš li raščlaniti uvjet na dijelove? Možeš li napisati te dijelove? Je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznanica? Možeš li zadatak drukčije izraziti?

Pitanja koja se odnose na postavljanje jednadžbi:

Možeš li naći vezu između zadanog i nepoznatog? Je li moguće zadovoljiti uvjet? Koja bi činjenica mogla pomoći pri postavljanju jednadžbe? Koliko jednadžbi treba postaviti? Jesi li iskoristio sve zadano? Jesi li iskoristio sve dijelove uvjeta? Ima li rješenje dobiveni sustav? Znaš li riješiti dobiveni sustav jednadžbi? Jesi li rješavao sličan sustav jednadžbi? Možeš li sustav jednadžbi svesti na rješavanje jedne jednadžbe? Što se može reći o broju rješenja jednadžbe?

Pogledajmo sada niz primjera u kojima ćemo opisati proces svođenja problema na rješavanje jednadžbi u skladu s onim što je gore rečeno. Čitateljima preporučujemo da pri analizi svakog primjera promisle o izboru pitanja iz navedenih skupina ili novih pitanja i time obogate metodu razgovora, koju najčešće primjenjuju u nastavnom procesu.

Primjer 1. Zbroj dvaju brojeva je 481, a njihova razlika 233. Koji su to brojevi?

U ovom slučaju nema nikakvih teškoća s razumijevanjem zadatka. Tekst je jednostavan i kratak, lako se uočava da su nepoznata dva broja, uvjet da se na prirodan način raščlanjuje na dva dijela, zbroj i razliku brojeva, pa se problem svodi na rješavanje sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Prevođenje s običnog jezika na matematički jezik izgleda ovako.

Nepoznata su dva broja.

$$x, \quad y.$$

1) Zbroj brojeva je 481.

$$x + y = 481.$$

2) Razlika brojeva je 233.

$$x - y = 233.$$

Traženi brojevi su, dakle, rješenja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$x + y = 481,$$
$$x - y = 233.$$
$$(x = 357, \quad y = 124.)$$

Iz sljedećeg zadatka s naših natjecanja moći ćemo izvući nekoliko korisnih pouka.

Primjer 2. Umnožak tri broja je 270. Koji su to brojevi ako se zna da je umnožak prvog i trećeg broja 30, a umnožak drugog i trećeg broja 135?

Regionalno natjecanje, 1992., IV. razred

Ni ovdje nema teškoća s razumijevanjem zadatka. Nepoznata su tri broja, a uvjet se očito sastoji od tri dijela koji se lako izdvajaju. Međutim, zbog uzrasta učenika, rješavanju ovog problema treba pristupiti vrlo pažljivo. Pogledajmo najprije svođenje problema na rješavanje jednadžbi. Prevođenje:

Nepoznata su tri broja.

$$a, \quad b, \quad c.$$

1) Umnožak triju brojeva je 270.

$$abc = 270.$$

2) Umnožak prvog i trećeg broja je 30.

$$ac = 30.$$

3) Umnožak drugog i trećeg broja je 135.

$$bc = 135.$$

Problem se formalno svodi na rješavanje sustava triju jednadžbi s tri nepoznanice

$$abc = 270,$$
$$ac = 30,$$
$$bc = 135.$$
$$(a = 2, \quad b = 9, \quad c = 15.)$$

Iako se sustav vrlo lako rješava, ovaj način rješavanja problema nije primjeren učenicima četvrtog razreda.

Drugi način rješavanja je lijep primjer logičkog zaključivanja za ovaj uzrast učenika, oslanjanjem na njihovo znanje o djeljivosti brojeva. Taj se način može najkraće opisati ovako. Kako je umnožak tri broja 270 i umnožak prvog i trećeg broja 30, to je 30 djelitelj broja 270, a pripadni količnik je drugi broj, tj. $b = 9$. Kako je $b = 9$ i $bc = 135 = 9 \cdot 15$, to je $c = 15$. Kako je $c = 15$ i $ac = 30 = 2 \cdot 15$, to je $a = 2$. Traženi brojevi su 2, 9 i 15.

Zadatak se mogao riješiti i pomoću tablice primjenom metode uzastopnih približavanja, odnosno metode pokušaja i pogrešaka.

Prema tome, učenici su mogli na razne načine riješiti zadatak. Što se onda može zaključiti iz činjenice da je od 50 učenika samo 5 učenika potpuno riješilo zadatak, 29 učenika djelomično, a 16 učenika nije riješilo ni jedan njegov dio? Uvažavajući i znatnu težinu zadatka, ipak se može zaključiti da učenici četvrtog razreda nisu dovoljno pripremljeni za rješavanje ovakvih problema i raščlanjivanje uvjeta s više dijelova. U nižim razredima treba posebnu pozornost obratiti razvoju mišljenja učenika.

Primjer 3. Majka i tri kćerke imaju zajedno točno 100 godina. Najmlađa kćerka ima četiri puta manje godina od svojih sestara zajedno. Kada se rodila druga kćerka, majka je imala osam puta više godina od prve kćerke. Kada se rodila treća kćerka, majka je imala dva puta više godina od prve dvije kćerke zajedno. Koliko godina imaju majka i kćerke?

Prema pitanju na kraju jasno je da se radi o problemu sa četiri nepoznate veličine, a četiri rečenice prije njega predstavljaju upravo niz od četiri dijela uvjeta. Prevođenje na matematički jezik prirodno se izvodi.

Nepoznate su godine majke i tri kćerke (promatrane po veličini):

$$m, \ a, \ b, \ c.$$

1) Zbroj godina majke i tri kćerke je 100.

$$m + a + b + c = 100.$$

2) Najmlađa kćerka ima četiri puta manje godina od svojih sestara zajedno.

$$c = \frac{1}{4}(a + b).$$

3) Kada se rodila druga kćerka, majka je imala $m - b$ godina i osam puta više godina od prve kćerke koja je tada imala $a - b$ godina.

$$m - b = 8(a - b).$$

4) Kada se rodila treća kćerka, majka je imala $m - c$ godina i dva puta više godina od prve dvije kćerke zajedno koje su tada imale $a - c$ i $b - c$ godina.

$$m - c = 2(a - c + b - c).$$

Tražene godine majke i kćerki rješenje su sustava četiriju linearnih jednadžbi sa četiri nepoznanice.

$$\begin{aligned} m + a + b + c &= 100, \\ a + b - 4c &= 0, \\ m - 8a + 7b &= 0, \\ m - 2a - 2b + 3c &= 0. \end{aligned}$$

$$(m = 50, \ a = 22, \ b = 18, \ c = 10.)$$

Sustav se najbrže rješava metodom suprotnih koeficijenata. Počinje se eliminacijom nepoznanica a i b iz prve i četvrte jednadžbe, a onda se rješavaju dva sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice.

U problemima koji se svode na rješavanje linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, obično je postavljanje jednadžbe znatno teže od rješavanja same jednadžbe. To dobro ilustrira sljedeći primjer.

Primjer 4. Autobus je krenuo s kolodvora mjesta M prema moru s određenim brojem putnika. Na prvom stajalištu izašla je $\frac{1}{7}$ putnika, a ušla su 4 nova. Na drugom stajalištu izašla je $\frac{1}{5}$ putnika koji su stigli do toga stajališta, a ušlo 7 novih. Na trećem stajalištu izašla je $\frac{1}{3}$ putnika, a ušao samo 1 putnik. Na četvrtom stajalištu, izlaskom ponovo $\frac{1}{3}$ putnika i ulaskom 3 nova, broj se putnika prepolovio obzirom na broj putnika na početku i svi su oni stigli u mjesto N na moru. Odredite taj broj.

Zahtjev "odredite taj broj" nije precizan, jer se može odnositi i na broj putnika na početku i na broj putnika koji je stigao na more.

U svakom slučaju to je jedina nepoznanica. Za njezino određenje potrebna je jedna jednadžba. Do nje ćemo doći iz uvjeta razmatranjem promjena broja putnika od stajališta do stajališta. Postavljanje jednadžbe izgleda ovako.

Nepoznat je broj putnika koji je krenuo iz mjesta M

$$x.$$

1) Na prvom stajalištu izašla je $\frac{1}{7}$ putnika, a ušla su 4 nova. Broj putnika koji nastavlja:

$$x-\frac{1}{7}x+4 \Longrightarrow \frac{6}{7}x+4.$$

2) Na drugom stajalištu izašla je $\frac{1}{5}$ putnika, a ušlo je 7 novih. Broj putnika koji nastavlja:

$$\frac{6}{7}x+4-\frac{1}{5}\left(\frac{6}{7}x+4\right)+7 \Longrightarrow \frac{24}{35}x+\frac{51}{5}.$$

3) Na trećem stajalištu izašla je $\frac{1}{3}$ putnika, a ušao je 1 novi. Broj putnika koji nastavlja:

$$\frac{24}{35}x+\frac{51}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{24}{35}x+\frac{51}{5}\right)+1 \Longrightarrow \frac{16}{35}x+\frac{39}{5}.$$

4) Na četvrtom stajalištu izašla je $\frac{1}{3}$ putnika, a ušla su 3 nova. Broj putnika koji nastavlja:

$$\frac{16}{35}x+\frac{39}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{16}{35}x+\frac{39}{5}\right)+3 \Longrightarrow \frac{32}{105}x+\frac{41}{5}.$$

5) Broj putnika se prepolovio:

$$\frac{32}{105}x+\frac{41}{5}=\frac{x}{2}.$$

Posljednja jednakost je jednadžba na koju se svodi naš problem. Rješavanjem te jednadžbe dobiva se traženi broj putnika, $x=42$. Na more je stigao 21 putnik.

Slijedi primjer matematičkog problema u kojemu je tekst pisan u obliku male pričice iz svakodnevnog života. Takve pričice mogu se koristiti kao izvjesno osvježenje u nastavi matematike i protuteža onim zadacima za koje se kaže da su suhoparni, stereotipni, šablonski. Jednom riječju, nezanimljivi.

Primjer 5. Doktor Puškarić strastven je lovac. Upravo se vratio iz lova i prijateljima pokazuje ulovljenu lisicu,

— Moj se Vučko danas iskazao. Zamislite, lisica se nalazila ispred njega 100 svojih skokova. Dok je ona načinila 5 skokova, Vučko je načinio samo 4, ali zato su njegova 4 skoka iznosila koliko i 7 lisičjih — ispričao je u jednom dahu.

— Nakon koliko je skokova Vučko stigao lisicu? — upitao je netko.

Bez obzira na to što je u ovom problemu posebna pozornost posvećena tekstu i formulaciji, tekst je “pun” matematike. U njemu se odmah uočavaju četiri nepoznate veličine, brojevi i duljine skokova, i slikoviti uvjet koji se sastoji od tri dijela. Prva dva dijela izražavaju proporcionalnost brojeva skokova i proporcionalnost duljina skokova, a treći dio, nešto sakriveniji, opisuje trenutak sustizanja lisice. Obzirom na uočeno, prirodno se nameće pitanje je li problem korektno postavljen. Pogledajmo što će otkriti daljnja analiza.

Nepoznato:

broj pasjih skokova, x,
broj lisičjih skokova, y,
duljina pasjeg skoka, p,
duljina lisičjeg skoka, l.

Dijelovi uvjeta: 1) Dok lisica načini 5 skokova, pas načini 4

$$y:x=5:4.$$

2) 4 pasja skoka iznose koliko i 7 lisičjih

$$4p=7l.$$

3) Lisica je bila 100 svojih skokova ispred psa. Do trenutka kada ju je pas dostigao, ona je načinila još y skokova, a pas x skokova

$$(100+y)l=xp.$$

Prema tome, problem se svodi na rješavanje sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}5x&=4y,\\4p&=7l,\\xp&=(100+y)l.\end{aligned}$$

Za četiri nepoznanice x, y, p i l dobili smo samo tri jednadžbe. Čini se premalo. Pogledajmo ipak pokušaj rješavanja ovog sustava eliminacijom četvrte nepoznanice l. U tu svrhu pomnožimo treću jednadžbu sa 7 i uvažimo drugu jednadžbu. Dobivamo $7xp = 7l(100 + y) = 4p(100 + y)$, odnosno $7x = 4(100 + y)$. Što vidimo? Eliminirali smo i treću nepoznanicu p! Gornji sustav svodi se na rješavanje sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} 5x - 4y &= 0, \\ 7x - 4y &= 400. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $x = 200$, $y = 250$. Pas je stigao lisicu nakon 200 svojih skokova, odnosno 250 lisičjih skokova.

Kakvu pouku nosi ovaj primjer? U zadatku su četiri nepoznate veličine, a uvjet se sastoji od samo tri dijela, pa prevođenje na matematički jezik daje sustav u kojem je broj jednadžbi manji od broja nepoznanica. To znači da broj jednadžbi nije dovoljan za određivanje svih četiriju nepoznanica. No, u zadatku se i ne zahtijeva određivanje svih četiriju nepoznatih veličina, već samo prve ili druge od njih. Za to je dobiveni sustav, a samim time i uvjet u zadatku sa svoja tri dijela, bio dovoljan. Ovakvi slučajevi nisu rijetki i znaju zbuniti rješavače.

Zadržimo se još malo na ovom primjeru i odgovorimo na jedno dodatno pitanje. Kako je zadatak formuliran u obliku zanimljive pričice i zbog toga pripada području zabavne matematike, može li se on riješiti jednostavnijim matematičkim sredstvima, kao što to obično biva sa zadacima takve naravi? Odgovor je potvrdan.

Evo ponovo jednog lijepog primjera logičkog zaključivanja primjerenog učenicima nižih razreda.

Četiri Vučkova skoka iznose koliko i sedam lisičjih skokova. No, dok je Vučko načinio četiri skoka, lisica je načinila samo pet skokova. To znači da je nakon svaka svoja četiri skoka Vučko nadoknađivao dva lisičja skoka. Kako Vučko mora nadoknaditi sto lisičjih skokova, to on mora pedeset puta načiniti po četiri skoka. Vučko je dostigao lisicu nakon 200 svojih skokova.

Sličnu pouku daje nam i jedan zadatak, također iz područja zabavne matematike, slavnog engleskog pisca Lewisa Carrola, uz to i profesora matematike.

Primjer 6. Netko je hodao 5 sati, najprije po ravnom dijelu puta brzinom od 4 km/sat, zatim se popeo na planinu brzinom od 3 km/sat i na kraju se vratio istim putem na polazno mjesto, pri čemu se spuštao s planine brzinom od 6 km/sat. Koju je udaljenost prevalila ta osoba?

Učenici mogu lako razumjeti zadatak. U nedoumici mogu biti jedino pri razmatranju nepoznanica i uvjeta. Nepoznata je svakako duljina čitavog puta, ali nepoznate su i duljine ravnog dijela puta i uspona, što treba uzeti u obzir, jer su brzine kretanja po tim dijelovima puta različite. Dakle, treba uvesti dvije nepoznanice. S druge strane, vidi se samo jedna veza između poznatih i nepoznatih veličina, a to je ona koju daju vremena kretanja. Dakle, u izgledu je samo jedna jednadžba. Pogledajmo kako do nje dolazimo.

Neka je x duljina čitavog puta, a y duljina uspona. Tada je duljina ravnog dijela puta jednaka $\frac{x}{2} - y$. Vrijeme hodanja po ravnom dijelu puta je $\frac{\frac{x}{2} - y}{4}$, vrijeme uspona $\frac{y}{3}$, a vrijeme spuštanja $\frac{y}{6}$. Uvjet sada možemo izraziti jednadžbom

$$\frac{\frac{x}{2} - y}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{\frac{x}{2} - y}{4} = 5.$$

Dobili smo jednu jednadžbu s dvije nepoznanice. Zar to nije nedovoljno za nalaženje tražene duljine puta x? Na prvi pogled to je ispravan zaključak. Međutim, ako se dobivena jednadžba napiše u obliku

$$\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)y = 5$$

i uoči da je koeficijent uz nepoznanicu y jednak 0, pa je konačan oblik jednadžbe $\frac{1}{4}x = 5$, onda postaje očito da gornji zaključak nije ispravan. Iz jednadžbe nalazimo da je duljina puta koji je osoba prevalila $x = 20$ km.

Da smo sa x i y označili duljine ravnog dijela puta i uspona, uvjet bi se izražavao jednadžbom $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{y}{6} + \frac{x}{4} = 5$. Dakle, opet jedna jednadžba s dvije nepoznanice. No, u ovom slučaju duljina čitavog puta je $2x + 2y$, što se iz jednadžbe može odrediti i opet nalazimo da je $2x + 2y = 20$ km.

Lako se otkriva da postojanje rješenja ovog problema leži u posebnom izboru brzina kretanja po dijelovima puta, tj. u brojevima 3, 4 i 6. Zanimljivo bi bilo pronaći sve trojke iznosa brzina za koje postoji rješenje problema. Dakle, poopćite problem!

Primjer 7. Pred blagajnikom se nalazi 100 moneta od 1, 2 i 5 kuna. Ukupna vrijednost svih moneta je 200 kuna. Koliko je moneta od svake pojedine vrste ako se zna da su dva od ta tri broja jednaka?

Sve je jasno osim činjenice da ne znamo koja su dva broja moneta jednaka. To će zahtijevati razmatranje triju sustava jednadžbi.

Nepoznati su brojevi moneta od 1, 2 i 5 kuna.

$$x, \ y, \ z.$$

1) Ukupan broj moneta je 100

$$x + y + z = 100.$$

2) Ukupna vrijednost svih moneta je 200 kuna

$$x + 2y + 5z = 200.$$

3) Dva od tri broja su jednaka

$$x = y \text{ ili } x = z \text{ ili } y = z.$$

Problem se svodi na rješavanje sljedeća tri sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ x + 2y + 5z &= 200, \\ x &= y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ x + 2y + 5z &= 200, \\ x &= z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100, \\ x + 2y + 5z &= 200, \\ y &= z. \end{aligned}$$

Prva dva sustava nemaju rješenja, a rješenje trećeg sustava je $x = 60$, $y = 20$, $z = 20$.

Niz primjera završit ćemo jednim problemom iz konstruktivne geometrije, pa će to biti lijepa ilustracija Descartesove postavke o mogućnosti svođenja geometrijske zadaće na algebarsku.

Primjer 8. Oko vrhova A, B i C danog trokuta ABC opišimo kružnice koje se međusobno dodiruju izvana.

Nećemo se upuštati u raspravu o tome postoji li geometrijska metoda rješavanja ove konstruktivne zadaće, već odmah prelazimo na primjenu algebarske metode. Ideja je da se jedna nepoznata veličina izrazi pomoću zadanih veličina i dobiveni izraz konstruira.

Dan je trokut ABC s duljinama stranica

$$a, \ b, \ c.$$

Nepoznate su tri kružnice k_A, k_B, k_C, oko vrhova A, B, C, odnosno njihovi polumjer

$$x, \ y, \ z.$$

1) Kružnice k_A, k_B dodiruju se izvana

$$x + y = c.$$

2) Kružnice k_A, k_C dodiruju se izvana

$$x + z = b.$$

3) Kružnice k_B, k_C dodiruju se izvana

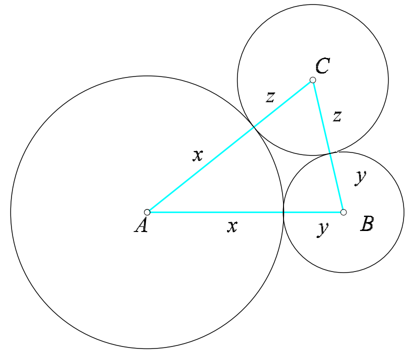
$$y + z = a.$$

Konstruktivna zadaća svodi se na rješavanje sustava triju jednadžbi s tri nepoznanice

$$\begin{aligned} x + y &= c, \\ x + z &= b, \\ y + z &= a. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a),$$
$$y = \frac{1}{2}(a + c - b),$$
$$z = \frac{1}{2}(a + b - c).$$



Sada se najprije konstruira jedna od veličina x, y, z, recimo x, a onda se oko vrhova A, B, C opišu kružnice polumjera x, $c - x$, $b - x$ (vidite sliku). Zadaća je uvijek određena i ima jedinstveno rješenje.

* * *

NOVA KNJIGA: *Margita Pavleković, Metodika nastave matematike s informatikom II*

Iz tiska je izišao drugi dio udžbenika “Metodika nastave matematike s informatikom” autorice Dr. Margite Pavleković, docentice na Pedagoškom fakultetu u Osijeku. Iako nastavak prve, ova knjiga čini samostalnu i neovisnu cjelinu.

Sadržaj knjige najbolje će opisati nasumce napravljen izbor nekih njezinih poglavlja:

∗ O sposobnostima za matematiku ∗ O problemu u nastavi matematike ∗ O definiciji i aksiomu u nastavi matematike ∗ O dokazu u nastavi matematike ∗ Poticanje pronalazaštva na nastavnom satu ∗ Poticanje pronalazaštva obradom malih tema ∗ Trokut i pripadni pravci. Eulerov pravac ∗ Programski paket MATHEMATICA *kao nastavno sredstvo ∗ Aktivna analiza pismenih radova ∗ Racionalna priprema za nastavu ∗ Vođenje nastavne dokumentacije ∗ Treba li konkretizirati apstraktno u nastavi matematike ∗ Je li ocjena mjera znanja i/ili odgojno sredstvo ∗ Nastavni sat kao rezultat proturječnih nastojanja*

Knjigu možemo toplo preporučiti svim studentima matematike, za predmet “Metodika nastave matematike”, svim nastavnicima koji se pripremaju za stručni ispit, pa i onima “starijima”, s dugim stažem u razredu, ako su duhom dovoljno mladi da žele naučiti više o sukobu tradicionalnog i suvremenog u nastavi matematike na prijelazu u 21. stoljeće.