Funkcija $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Branimir Dakić, Zagreb

Određivanje *glavne mjere kuta* jedan je od prvih zadataka s kojim se susrećemo pri uvodu u *Trigonometriju* [1]

Ako je α' neka mjera kuta, njegova je glavna mjera α jednaka

$$\alpha = \alpha' - \left\lfloor \frac{\alpha'}{360} \right\rfloor \cdot 360^\circ .$$

U tome zapisu imamo jednu jednostavnu realnu funkciju u oznaci $f(x) = \lfloor x \rfloor$, koju zovemo *najveće cijelo od* x, ili *najveći cjelobrojni dio* [2] *broja x.*

Kako definiramo funkciju $f(x) = \lfloor x \rfloor$?

Svaki realni broj x možemo zapisati u obliku $x = a + t$, gdje je a cijeli broj, a t broj iz intervala $[0, 1\rangle$. Broj a označavamo sa $\lfloor x \rfloor$ i zovemo najveće cijelo [3] od x.

Tako je primjerice: $\left\lfloor \dfrac{155}{33} \right\rfloor = 4$, jer je

$$\frac{155}{33} = 4.\dot{6}\dot{9} = 4 + 0.\dot{6}\dot{9};$$

$$\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3 + 0.14159... \rfloor = 3;$$
$$\lfloor -9.203 \rfloor = \lfloor -10 + 0.797 \rfloor = -10;$$
$$\lfloor -\sqrt{111} \rfloor = -11,$$

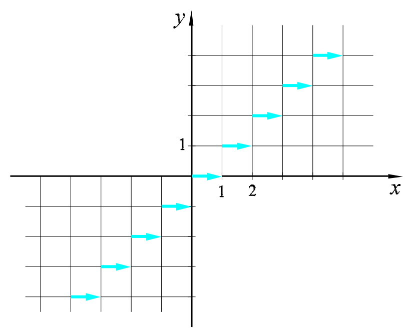
itd.

Broj t, $t \in [0, 1\rangle$, zapisujemo sa $\{x\}$, i zovemo *decimalni dio broja x.*

Dakle je

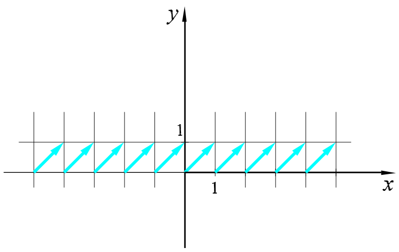
$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Na dvjema prethodnim slikama prikazani su grafovi ovih dviju funkcija, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ i $f(x) = \{x\}$.



Sl. 1. Graf funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Trigonometrija*, Element 1998.
[2] engl. *floor* – dno, pod
[3] Oznaka za funkciju *najveće cijelo* ranije je bila $[x]$. No nova oznaka $\lfloor x \rfloor$ omogućila je zapisivanje dualne funkcije *najmanje cijelo, engl. ceiling* – *strop* za koju se prirodno uvela oznaka $\lceil x \rceil$.



Sl. 2. Graf funkcije $f(x) = \{x\}$

Funkcija *najveće cijelo* x ima niz svojstava, a mi navodimo nekoliko onih koja su očita:

1. $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, za $n \in \mathbf{Z}$;

2. $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, za sve $x, y \in \mathbf{Z}$;

3. $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{n} \right\rfloor$, za sve $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$.

4. Ako je $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$, tada je $|x-y| < 1$.

Ova funkcija primjenjuje se u raznim zadacima matematičke analize, algebre, teorije brojeva, kombinatorike, teorije vjerojatnosti itd. Na nju ćemo naići i u udžbenicima za gimnazije [4].

* * *

Uz ovaj prikaz evo sada nekoliko primjera koji bi trebali doprinijeti boljem razumijevanju funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor$ u srednjoj školi.

Primjer 1. Pojam *karakteristika logaritma* zbog određivanja logaritama pozitivnih realnih brojeva pomoću računala gotovo je potpuno iščeznuo iz naše srednje škole. Taj je pojam za razumijevanje logaritamske funkcije sigurno važan i zaslužuje veću pozornost nego mnogi zadaci kojima se bavimo uz obradu ove teme.

Činjenicu da za sve brojeve x, za koje je $10^n \leq x < 10^{n+1}$ vrijedi $n \leq \log x < n+1$, odnosno da je cijeli broj n karakteristika logaritama svih brojeva x iz navedenog intervala, možemo zapisati kao $\lfloor \log x \rfloor = n$.

I obrnuto, ako je primjerice $\lfloor \log_2 x \rfloor = 3$, to povlači $8 \leq x < 16$.

Primjer 2. Riješiti jednadžbu

$$\left\lfloor \frac{x-1}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right\rfloor = \log x.$$

▶ Jednadžbu ćemo zapisati u obliku

$$\left\lfloor \frac{x-1}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

I tada, ako je $\left\{ \frac{x}{2} \right\} \geq \frac{1}{2}$, imamo jednadžbu $\log x = 0$, te je $x_1 = 1$.

Ako je pak $0 \leq \left\{ \frac{x}{2} \right\} < \frac{1}{2}$, onda imamo jednadžbu $\log x = -1$ i rješenje $x_2 = \frac{1}{10}$. ◀

* * *

Na školskom natjecanju u I. gimnaziji u Zagrebu učenicima IV. razreda postavljen je i ovaj zadatak:

Primjer 3. Odredi prirodno područje definicije funkcije

$$f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor^2 - \lfloor x \rfloor - 56},$$

gdje je sa $\lfloor x \rfloor$ označen najveći cijeli broj manji ili jednak realnom broju x.

▶ Zadatak je neke vrste test razumijevanja zapisa jedne nove funkcije. Očekivalo se rješenje zadatka manjeg broja natjecatelja, ali se pokazalo kako je taj zadatak učenicima jednostavno prelagan i gotovo su ga svi riješili.

Evo i rješenja: iz $\lfloor x \rfloor^2 - \lfloor x \rfloor - 56 = (\lfloor x \rfloor + 7)(\lfloor x \rfloor - 8) = 0$ slijedi $\lfloor x \rfloor = -7$ ili $\lfloor x \rfloor = 8$, odnosno, $x \in [-7, -6\rangle$ ili $x \in [8, 9\rangle$, te je područje definicije funkcije f skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ bez intervala $[-7, -6\rangle$ i $[8, 9\rangle$. ◀

[4] Primjerice zadaci 3.103, 3.104, 3.105. i 3.106., u knjizi B. Dakić, *Zbirka zadataka za II. razred gimnazije*, Element, 1996., te zadaci 4.2., 5.37., 5.58., 5.211., u B. Dakić, N. Elezović, *Zbirka zadataka za IV. razred gimnazije*, Element 1995.

Primjer 4. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1001 koji su djeljivi ili sa 3 ili sa 5?

▶ Imamo $\left\lfloor \frac{1001}{3} \right\rfloor$ brojeva manjih od 1001 djeljivih sa 3, $\left\lfloor \frac{1001}{5} \right\rfloor$ djeljivih sa 5, te $\left\lfloor \frac{1001}{15} \right\rfloor$ djeljivih i sa 3 i sa 5.

Zbog toga je ukupno $\left\lfloor \frac{1001}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1001}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1001}{15} \right\rfloor = 333 + 200 - 66 = 467$ brojeva manjih od 1001 koji su djeljivi ili sa 3, ili sa 5. ◀

Primjer 5. S koliko nula završava broj 333!?

▶ Valja odrediti najveću potenciju broja 10 kojim je djeljiv broj 333!. No $10 = 2 \cdot 5$, pa je dovoljno naći potenciju od 5 u tom umnošku (faktor 2 je učestaliji). Jer je $333 < 5^4$, imamo

$$\left\lfloor \frac{333}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{333}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{333}{5^3} \right\rfloor = 66 + 13 + 2 = 81,$$

pa zaključujemo kako broj 333! završava s 81 nulom. ◀

* * *

Zgodno je rješavati i neke jednostavnije jednadžbe s funkcijom $\lfloor x \rfloor$. Rješavanje takvih jednadžbi vrlo je sadržajno, što ćemo odmah i potkrijepiti primjerima.

Primjer 6. Riješi jednadžbu:

$$\left\lfloor \frac{2x+1}{3} \right\rfloor = \frac{5x-3}{4}.$$

▶ Uvest ćemo zamjenu $\frac{5x-3}{4} = t$, iz koje slijedi $x = \frac{4t+3}{5}$, te tako dobivamo jednadžbu $\left\lfloor \frac{8t+11}{15} \right\rfloor = t$.

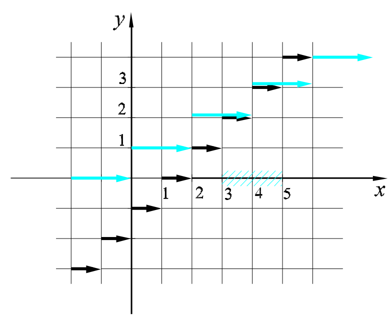
Pritom za cijeli broj t mora biti ispunjen sustav nejednadžbi

$t \leq \frac{8t+11}{15} < t + 1$. Iz tog sustava slijedi $-\frac{4}{7} \leq t < \frac{11}{7}$, odnosno $t = 0$ ili $t = 1$. Prvi od ova dva slučaja daje $x_1 = \frac{3}{5}$, drugi $x_2 = \frac{7}{5}$. To su ujedno sva rješenja zadane jednadžbe. ◀

Primjer 7. Riješi jednadžbu

$$\lfloor x - 1 \rfloor = \left\lfloor \frac{x+2}{2} \right\rfloor.$$

▶ Ovu jednadžbu je vrlo jednostavno riješiti grafički. Nacrtamo grafove funkcija $f(x) = \lfloor x - 1 \rfloor$ i $g(x) = \left\lfloor \frac{x+2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor + 1$.



Sl. 3.

Graf prve je graf funkcije $\lfloor x \rfloor$ translatiran u smjeru x osi za 1. Graf druge je *stubište* sa *stubom* duljine 2, od kojih je ona *nulta* interval $[-2, 0\rangle$.

Ta se dva grafa preklapaju nad intervalom $[3, 5\rangle$ te svaki broj iz tog intervala zadovoljava zadanu jednadžbu. ◀

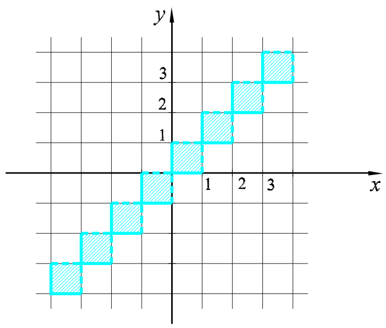
Primjer 8. Prikaži grafički skup točaka $T(x, y)$ ravnine za koje je

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor.$$

▶ Danom jednadžbom određen je skup točaka za čije koordinate x i y vrijedi

$$n \le x < n+1, \quad n \le y < n+1,$$

gdje je n cijeli broj. Na taj način dobije se jedan beskonačan niz kvadrata, koji su odozdo i slijeva zatvoreni a odozgo i zdesna otvoreni. ◀



Sl. 4.

Primijetimo kako se iz ovog posljednjeg rješenja zorno uočava svojstvo 4.

* * *

Zanimljivo je kako se primjenom funkcije $\lfloor x \rfloor$ iz relativno jednostavnih jednadžbi mogu dobiti lijepe i nimalo jednostavne sličice.

Tako je primjerice jednadžbom

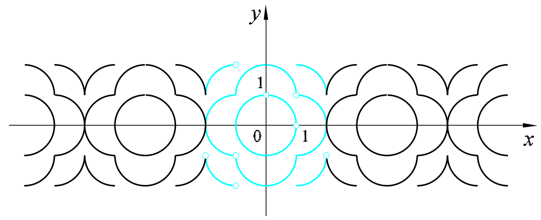
$$\left(x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)^2 + \left(y - \left\lfloor y + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)^2 = \frac{1}{16},$$

zadan skup kružnica sa središtima u cjelobrojnim točkama i polumjerom $r = \frac{1}{4}$.

Što će se promijeniti ako s desne strane jednakosti umjesto $\frac{1}{16}$ stavimo $\frac{5}{16}$ [5]?

Na slici 5. prikazan je jedan lijep ornament. Njegov osnovni element E_0 (istaknut u središnjem dijelu slike, sa središtem simetrije u ishodištu) grafički je prikaz relacije

$$\left(x - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor\right)^2 + \left(y - \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor\right)^2 = 1.$$

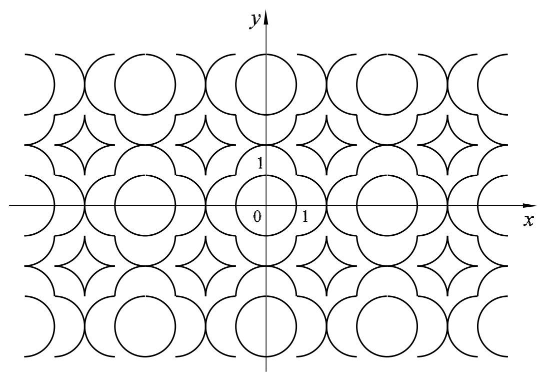


Sl. 5.

Translacijama tog osnovnog elementa duž osi x dobit ćemo *ukrasnu traku* koju opisuje jednadžba

$$\left(x - 2\left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor\right)^2 + \left(y - \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor\right)^2 = 1.$$

A translacije te *ukrasne trake* u smjeru osi y dat će oslikanu cijelu ravninu.



Sl. 6.

* * *

I na kraju, navodimo još dva jednostavnija zadatka:

Zadatak. Prikažite grafički skup točaka ravnine koji je određen jednadžbama:

1. $\left(x - 2\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor\right)^2 + y^2 = 1;$

2. $y = \left| x - 2\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \right|.$

[5] Vidjeti B. Dakić, N. Elezović, *Analitička geometrija*, str.171., Element; Zagreb, 1998.