

Verižni razlomci i problem kalendara



Andrej Dujella, Zagreb

U ovom članku razmotrit ćemo matematičku pozadinu problema kalendara. Postoje dvije očite prirodne jedinice vremena: dan i (Sunčeva) godina. Nažalost, ove dvije jedinice nije jednostavno međusobno uskladiti. Problem je u tome što Sunčeva godina ne sadrži cijeli broj dana. Naime,

$$\begin{aligned} 1 \text{ godina} &= 365 \text{ dana } 5 \text{ sati } 48 \text{ minuta} \\ &\quad 46 \text{ sekundi} \\ &= 365.242199 \text{ dana.} \end{aligned}$$

Jasno je da bi bilo vrlo nepraktično imati kalendar u kome broj dana u godini ne bi bio cijeli broj. S druge strane, ukoliko bi uzeli da svaka godina ima 365 dana (takav se kalendar koristio u starom Egiptu), tada bi se svake četvrte godine kalendarska godina razlikovala od Sunčeve godine otprilike za 1 dan, pa bi se ubrzo izgubila veza između datuma u godini i godišnjih doba.

Stoga se prirodno nameće rješenje da neke godine imaju 365 dana (obične godine), a

neke 366 dana (prijestupne godine). Sada se postavlja pitanje kako to napraviti pa da prosječan broj dana u godini bude što bliže broju 365.242199. To je matematički problem o kojem će biti riječi u ovom članku. Zapravo, postavlja se pitanje kako dani realni broj što bolje aproksimirati pomoću razlomaka s relativno malim nazivnikom. Odgovor na to pitanje daju nam tzv. verižni ili neprekidni razlomci.

Konačni verižni razlomak je izraz oblika

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}, \quad (1)$$

gdje je a_0 cijeli, a $a_1, a_2, \dots, a_n$ su prirodni brojevi. Ovaj izraz kraće zapisujemo sa $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Jasno je da se sređivanjem konačnog verižnog razlomka dobiva običan razlomak, tj. racionalan broj. Obr-



nuto, svaki racionalan broj $\alpha = \frac{p}{q}$ može se zapisati u obliku (1). To se onda zove razvoj broja α u verižni razlomak. Razvoj je jedinstven ukoliko zahtijevamo da je $a_n \neq 1$. Brojevi a_i zovu se parcijalni kvocijenti od α . To su upravo kvocijenti koji se dobiju primjenom Euklidovog algoritma na brojeve p i q :

$$\begin{aligned} p &= q \cdot a_0 + r_1 \\ q &= r_1 \cdot a_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \cdot a_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= r_n \cdot a_n. \end{aligned}$$

Racionalan broj $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ za $k \leq n$ zovemo k -ta konvergenta od α . Svaki iracionalan broj α se može zapisati u obliku beskonačnog verižnog razlomka $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. To znači da je $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$.

Brojnici i nazivnici konvergenti mogu se efikasno izračunati pomoću rekurzivnih relacija

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_0 a_1 + 1, \\ p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}$$

Ove relacije se mogu lako dokazati matematičkom indukcijom. Iz rekurzivne formule je jasno da niz nazivnika (q_k) strogo raste, te također da je $q_k \geq F_k$, gdje je F_k k -ti Fibonačijev broj.

Indukcijom se dokazuje i važna formula

$$p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} = (-1)^k \quad (2)$$

koja povezuje susjedne konvergente. Ona neposredno povlači da su brojevi p_k i q_k relativno prosti, što znači da su razlomci $\frac{p_k}{q_k}$ potpuno skraćeni. Formula (2) također pokazuje da su parne konvergente manje od neparnih. Štoviše, za iracionalan broj α vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \alpha < \dots \\ \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}, \end{aligned}$$

dok za racionalan broj α vrijede iste nejednakosti, osim što je posljednja konvergenta $\frac{p_n}{q_n} = \alpha$.

Mi želimo pokazati da konvergente predstavljaju dobre aproksimacije broja α . Postoji više načina kako definirati što to znači da je aproksimacija dobra. Mi ćemo razmotriti dva takva načina. Prirodno je reći da je razlomak $\frac{p}{q}$ dobra aproksimacija realnog broja α ako je greška aproksimacije $|\alpha - \frac{p}{q}|$ najmanja među svim razlomcima s nazivnikom $\leq q$, tj.

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \min \left\{ \left| \alpha - \frac{x}{y} \right| : x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{N}, y \leq q \right\}.$$

Može se pokazati da su uz ovakvu definiciju konvergente $\frac{p_k}{q_k}$ dobre aproksimacije. Primijetimo međutim da ne vrijedi obrat. Naime, ako je $\frac{p}{q}$ dobra aproksimacija, onda je $\frac{p}{q}$ jednak ili nekoj konvergenti od α ili nekoj tzv. sekundarnoj konvergenti od α , gdje je sekundarna konvergenta izraz oblika

$$\frac{p_{k,l}}{q_{k,l}} = \frac{p_{k+1} \cdot l + p_k}{q_{k+1} \cdot l + q_k}$$

za $l = 1, 2, \dots, a_{k+2} - 1$.

Kod gornje definicije dobre aproksimacije u stvari se zahtijeva da je apsolutna greška minimalna. Možda je još prirodnije zahtijevati da je relativna greška minimalna, tj. tražiti veću točnost od razlomaka s većim nazivnikom. Tako se može reći da je $\frac{p}{q}$ dobra aproksimacija realnog broja α ako je izraz $|q\alpha - p|$ minimalan, tj. ako je

$$|q\alpha - p| = \min \{ |y\alpha - x| : x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{N}, y \leq q \}.$$

Može se pokazati da su u ovom slučaju dobre aproksimacije upravo konvergente od α . Štoviše, vrijedi da je

$$|q_k \alpha - p_k| \leq |q \alpha - p|$$

za sve $q \leq q_{k+1}$. Dakle, ne samo da $\frac{p_k}{q_k}$ daje najmanju relativnu grešku među svim razlomcima s nazivnikom $\leq q_k$, već se ta greška ne može smanjiti ni s većim nazivnikom sve dok se ne dođe do sljedeće konvergente $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$.



Gore navedena svojstva verižnih razlomaka sugeriraju nam da bi upravo njih trebalo koristiti u rješenju problema kalendara. Trajanje jedne Sunčeve godine je eksperimentalna veličina. Stoga nema smisla razmatrati da li je taj broj racionalan ili iracionalan. Mi ćemo taj broj zamijeniti s njegovom približnom vrijednošću

$$\begin{aligned}\alpha &= 365 + \frac{5 \text{ h } 48 \text{ m } 46 \text{ s}}{1 \text{ dan}} \\ &= 365 + \frac{20926 \text{ s}}{86400 \text{ s}} \\ &= 365 \frac{10463}{43200}.\end{aligned}$$

Broj α je racionalan i prema tome je njegov razvoj u verižni razlomak konačan. Primjenom Euklidovog algoritma na brojeve 43200 i 10463 dobivamo:

$$\begin{aligned}43200 &= 10463 \cdot 4 + 1348 \\ 10463 &= 1348 \cdot 7 + 1027 \\ 1348 &= 1027 \cdot 1 + 321 \\ 1027 &= 321 \cdot 3 + 64 \\ 321 &= 64 \cdot 5 + 1 \\ 64 &= 1 \cdot 64.\end{aligned}$$

Stoga je $\alpha = [365; 4, 7, 1, 3, 5, 64]$. Konvergente broja $\alpha - 365$ su redom

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{163}{673}, \frac{10463}{43200}.$$

Svaka od ovih konvergenti daje jedno rješenje problema kalendara. Tako je kod prve konvergente prosječno trajanje godine $365\frac{1}{4}$ dana. To točno znači da je svaka četvrta godina prijestupna. Općenito, nazivnik konvergente nam daje duljinu ciklusa, a brojnik nam daje broj prijestupnih godina u svakom

ciklusu. Vidljivo je da peta i šesta konvergenta daju vrlo nepraktična rješenja. Stoga razmotrimo pobliže kalendare koje nam daju prve četiri konvergente.

Prva konvergenta nam daje upravo julijanski kalendar koji je po zamisli egipatskog astronoma Sosigena uveo rimski car Julije Cezar 45. godine prije Krista. Druga mogućnost nije dobra jer je jednako komplicirana kao treća, a mnogo je netočnija. Ovu treću mogućnost (8 prijestupnih godina u ciklusu od 33 godine) predložio je perzijski znanstvenik Omar Khayyan u 11. stoljeću.

Četvrta mogućnost je vrlo precizna. Greška od jedne sekunde je praktički zanemarljiva. Ovaj kalendar bi zahtijevao samo jednu modifikaciju u julijanskom kalendaru, naime, da se svaka 128. godina proglasi običnom, a ne prijestupnom. Zaista, julijanski kalendar u svakom ciklusu od 128 godina sadrži 32 prijestupne godine. Ovaj kalendar je predložio ruski astronom Medler 1864. godine i s čisto matematičkog stajališta ovo se može smatrati najboljim rješenjem problema kalendara. Možda je jedini njegov nedostatak taj da broj 128 nije dovoljno "okrugli broj". Stoga je i danas opće prihvaćen gregorijanski kalendar u kojem se u svakom ciklusu od 400 godina nalazi 97 prijestupnih. Preciznije, u gregorijanskom kalendaru prijestupna je svaka četvrta godina s tim ako je godina djeljiva sa 100, a nije djeljiva sa 400 (takvih ima 3 u svakom ciklusu od 400 godina), onda se takva godina smatra običnom, a ne prijestupnom. Prosječno trajanje godine u ovom kalendaru je 365 d 5 h 49 m 12 s, pa greška iznosi -26 s.

broj prijestupnih godina u ciklusu	duljina ciklusa	prosječno trajanje godine	greška
1	4	365 d 6 h 00 m 00 s	-11 m 14 s
7	29	365 d 5 h 47 m 35 s	+1 m 11 s
8	33	365 d 5 h 49 m 05 s	-19 s
31	128	365 d 5 h 48 m 45 s	+1 s



Gregorijanski kalendar je 1582. godine uveo papa Grgur XIII. Osnovna značajka ovog kalendara je jednostavnost provjere da li je dana godina prijestupna ili ne. Naime, kriteriji djeljivosti sa 4, sa 100 i sa 400 su vrlo jednostavni. Pritom, preciznost aproksimacije kod ovog kalendara nije idealna, ali je mnogo bolja nego kod julijanskog kalendara.

Ovdje treba još reći i to da u 16. stoljeću za trajanje jedne Sunčeve godine nije bila poznata tako precizna vrijednost kao danas.

Naime, tada se smatralo da jedna Sunčeva godina ima 365 dana, 5 sati, 49 minuta, 16 sekundi, pa je uz tu pretpostavku greška kod gregorijanskog kalendara iznosila samo +4 sekunde.

VJEČNI PITAGORA

Uzmemo dva uzastopna parna ili neparna prirodna broja, primjerice 5 i 7, te zbrojimo njihove recipročne vrijednosti:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}.$$

Zbroj je razlomak čiji su brojnik i nazivnik katete pravokutnog trokuta. Uistinu:

$$12^2 + 35^2 = 37^2.$$

Uzmemo brojeve 4 i 6 i ponovimo postupak:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Je li riječ o nekom općem pravilu? Vrijedi li ovo za svaka dva prirodna broja $n - 1$ i $n + 1$, $n > 1$?

Provjerimo:

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n}{n^2-1},$$

te je $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$. Potvrdili smo, na opisani se način uistinu dobivaju **Pitagorejske trojke** brojeva.

Brojevi $2mn$, $n^2 - m^2$ i $n^2 + m^2$ uz uvjet $n > m$ duljine su stranica pravokutnog trokuta. Našim računom mi smo dobili poseban izbor **Pitagorejskih trojki**, kada je $m = 1$. U tom slučaju duljina veće katete za dva je manja od duljine hipotenuze.

