

Kako su računali naši stari

Niko Radić i Darko Žubrinić



Ručno množenje

Nerijetko se čuje primjedba kako su stari ljudi, tj. oni koji su živjeli prije nas, bili primitivni i neuki, kako ima mnogo stvari koje nisu znali pa im je stoga život bio težak. Ima u tome dakako istine, no sve je to i velika neistina ako ne znamo da su mnoge stvari znali i umjeli bolje nego mi danas. Kada se npr. uzmu pred oči građevine iz prošlosti, koji put nam stane dah, ako uspijemo otkriti kakvom su domišljatošću rješavali neke probleme koje mi danas ne znamo tako kvalitetno riješiti. Uzmemo li kao primjer znamenitu crkvicu sv. Dunata kod Punta na otoku Krku, pa otkrijemo u njezinim, naizgled, nepravilnostima neku drugu "pravilnost" koju mi danas sa svom tehnikom gotovo nismo sposobni postići, ne možemo a da se ne zadivimo. U svakom je slučaju bolje stajati pred prošlošću s poštovanjem nego s osjećajem obezvrjeđivanja i potcjenjivanja, jer ćemo u protivnom lako biti osramoćeni.

Ovo neka posluži samo kao uvod u opis

jedne stare vještine jednostavnog računanja primjerenog životnim okolnostima i konkretnim potrebama tadašnjeg života ljudi.

Zahvaljujući Vjekoslavu Mrakovčiću uspio sam naučiti tu jednostavnu, ali vrlo domišljato korištenu "tablicu množenja" pa je želim ovdje prikazati čitateljima "Matematike i škole". Možda ćete se i vi diviti domišljatosti starih, a možda ćete je i sami nekada rabiti. Vrijedno je, po mom sudu, i jedno i drugo.

A evo kako je to izgledalo: množenje brojeva 5 i svih nižih trebalo je znati napamet. No, s brojevima od 5 do 10 išlo je drukčije: uz pomoć ruku, odnosno prstiju.

Detaljno ćemo množenje opisati riječima i slikom, a vi isprobajte.

Svaki od brojeva koji su se množili prikazali bi se prstima jedne ruke i to tako da bi se za broj 6 digao jedan prst na ruci, a druga su četiri prsta ostala stisnuta. Broj 7 prikazao bi se tako da bi se digla dva prsta, dok bi tri ostala stisnuta, i tako je išlo do 10, kada već nijedan prst nije ostao stisnut, nego je svih pet bilo dignuto. Jedan broj bi se tako



prikazao jednom rukom, a drugi drugom, na isti način. Rezultat se dobio tako da bi se svi dignuti prsti (na obje ruke) zbrojili kao desetice. To znači, ako su ukupno bila dignuta dva prsta, onda je to značilo 20, ako tri, onda je to bilo 30, itd. Stisnuti bi se pak prsti na rukama međusobno množili (zato je trebalo znati napamet množiti brojeve samo do 5). Broj koji bi se tim množenjem dobio pribrojio bi se onim deseticama i time bi se dobio traženi rezultat.

Pokazat ćemo to na jednom primjeru. Ako želite pomnožiti šest i sedam, tj. 6×7 , na jednoj ćete ruci dignuti jedan prst (četiri su ostala stisnuta), a na drugoj dva prsta (tri su ostala stisnuta). Kada zbrojite dignute prste imate ih tri, a to ovdje znači 30. Kada pomnožite stisnute prste – morate pomnožiti četiri puta tri – dobivate dvanaest. Zbrojite desetice, tj. 30, s ovim umnoškom, tj. s 12, i dobivate 42. A to je upravo 6 puta 7. Tako učinite s bilo koja dva broja između 5 i 10.



Objašnjenje

Ostali smo dužni objasniti zašto ovakvo množenje uvijek daje točan rezultat. Jedan način da to učinimo jest da provjerimo točnost toga množenja za sve zadane parove brojeva između 5 i 10. Ima ih ukupno 21: 5×5 , 5×6 , 5×7 , 5×8 , 5×9 , 5×10 , zatim 6×6 , 6×7 , 6×8 , 6×9 , 6×10 , onda (uf!) 7×7 , 7×8 , 7×9 , 7×10 , (čovječe, dosta je!) 8×8 , 8×9 , 8×10 , (još malo!) 9×9 , 9×10 , i napokon 10×10 . Ajoj! Toliko vremena ipak nema smisla potrošiti za provjeru ovog pravila.

Ima li koji kraći i pametniji način? Pa, ..., pokušajmo. Krenimo opet od samog početka.

Najprije imamo zadana dva broja između 5 i 10. Moramo nekako označiti njihove vrijednosti, kakve god da jesu. Npr. sa x i y , ili s neka druga dva slova abecede, po vlastitom izboru, ako vam se ova ne sviđaju.

Želimo pomnožiti brojeve x i y na opisan način, tj. ručno. Najprije ćemo na jednoj ruci dignuti $x - 5$ prstiju, a na drugoj $y - 5$ prstiju. Zbroj podignutih prstiju na obje ruke iznosi $(x - 5) + (y - 5)$, i njega gledamo kao broj desetica, tj. kao broj

$$10(x - 5) + 10(y - 5) = 10x + 10y - 100.$$

Dobro. Sada tom broju dodajemo još umnožak broja stisnutih prstiju jedne ruke s brojem stisnutih prstiju druge ruke, tj.

$$\begin{aligned} & [5 - (x - 5)] \cdot [5 - (y - 5)] \\ &= (10 - x)(10 - y) \\ &= 100 - 10x - 10y + xy. \end{aligned}$$

Treba vidjeti je li zbroj prethodna dva broja jednak xy . Pa, pogledajmo:

$$(10x + 10y - 100) + (100 - 10x - 10y + xy) = xy$$

tj. zbroj je doista jednak $x \times y$, ili xy u uobičajenoj oznaci za množenje brojeva.



Pitanja

Matematičari vole postavljati neobična pitanja. Nerijetko i sami nisu sigurni imaju li njihova pitanja smisla. Evo jednog takvog pitanja, za koje nismo sigurni je li baš pametno. Zamislite da negdje daleko od nas, u dubini svemira, postoji jedan planet. Na tom planetu žive pametna dječica, ali s četiri prstića na svakoj ručici, a ne pet. I zamislite da znaju pomnožiti samo brojeve od 1 do 4. Pitamo se kako bi izgledalo njihovo “ručno množenje” brojeva od 4 do 8. Izračunajmo npr. 6 puta 7 na “njihov način.” Pritom ćemo njihove podignute prste brojiti kao “osmice”, a ne kao “desetice”. Poslužit ćemo se naravno našim rukama, ali tako da zaboravimo svoj mali prst, i gledamo svaku našu ruku kao da ima samo četiri prsta. Broju šest sada odgovaraju dva podignuta prsta (dva su ostala stisnuta), a na drugoj ruci broju sedam odgovaraju tri podignuta prsta. Zbroj je pet, koje gledamo kao osmice, čemu odgovara broj 40.



I tome još dodamo umnožak stisnutih prstiju, tj. dva puta jedan. Ukupno 42. Točno, zar ne?!

Hm, još jedno pitanje. A što ako postoji planet s djecom koja imaju neki drugi broj prstića na svakoj ruci? Npr. jako veliki. Kako bi izgledalo “njihovo množenje”? Objašnjenje? Tko zna, možda i stonoge imaju neko svoje “nožno množenje”?



Prebrojavanje neporedanih parova brojeva

Gore smo ispisali sve umnoške brojeva od pet do deset. Vidjeli smo da ih ima ukupno dvadeset i jedan. Može li se ustanoviti da imamo ukupno dvadeset i jedan umnožak na neki kraći način, tj. da ih ne ispisujemo sve redom? Može.

Evo kako. Brojeva od 5 do 10 (uključujući oba) ima ukupno 6, tj. $10 - 4$ (a ne $10 - 5$, kao što bi čovjek u prvi čas pomislio). Uzmimo bilo koji od tih šest brojeva kao prvi broj u našem umnošku. Pretpostavimo najprije da je drugi broj različit od prvoga. Onda svaki od 6 brojeva možemo složiti u umnožak s bilo kojim od preostalih 5. Takvih parova različitih brojeva ima ukupno $6 \times 5 = 30$. Prvi broj možemo izabrati na šest načina, a za svaki takav, drugi možemo izabrati na pet načina (npr. ako smo odabrali 7 kao prvi, možemo odabrati 5, 6, 8, 9 ili 10 kao drugi). Međutim, mi nećemo razlikovati umnoške 7×9 i 9×7 , jer su isti. Prema tome, od ukupno 30 parova različitih brojeva od 5 do 10, njih je ukupno $30 : 2 = 15$ koji nas zanimaju.

Preostalo je još ukupno 6 parova koji imaju jednake znamenke, koje također treba uzeti u obzir: $5 \times 5, 6 \times 6, \dots, 10 \times 10$. Ukupan broj takvih parova jednak je $10 - 4 = 6$, a ne $10 - 5$ kao što bi čovjek mogao pomisliti. Zaključujemo da imamo ukupno $15 + 6 = 21$ par brojeva. I to se slaže s našim prijašnjim

prebrojavanjem.

Na isti način možemo npr. izračunati koliko umnožaka možemo napraviti rabeći dva broja od sto do dvjesto (uključujući prvi i zadnji): naprije računamo $101 \cdot 100 = 10100$, zatim podijelimo s dva – dobivamo 5050, i na kraju dobivamo da postoji ukupno $5050 + 101 = 5151$ parova brojeva od 100 do 200. Savjetujemo da ih ipak ne ispisujete u bilježnicu. Za to bi vam trebalo nekoliko mjeseci neprekinutog pisanja.

Sada, nakon ovako velikog iskustva u prebrojavanju, možemo pogledati i sasvim općenito, koliko ima (neporedanih, tj. 7×9 poistovjećujemo sa 9×7) parova brojeva između dva zadana prirodna broja x i y (uključujući i ta dva broja), pri čemu je $x < y$. Brojeva između x i y , uključujući prvi i zadnji, ima ukupno $y - x + 1$. Pripadnih poredanih parova brojeva, gdje su oba broja različita, ima ukupno $(y - x + 1)(y - x)$. Kao što znamo, da bismo dobili broj neporedanih parova, taj broj moramo podijeliti s dva, i dodati još $y - x + 1$. Dakle, traženi broj svih parova jednak je

$$\begin{aligned} & \frac{(y - x + 1)(y - x)}{2} + (y - x + 1) \\ &= (y - x + 1) \left(\frac{y - x}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(y - x + 1)(y - x + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Matematičari vole neki svoj rezultat istaknuti u obliku zasebne tvrdnje, koja se obično zove **stavak**, ili **teorem**. U njemu se vrlo sažeto opisuje zadatak koji se rješava: najprije pretpostavke, a onda konačan rezultat (bez dokaza). Što kraće, to bolje. Tako ćemo i mi učiniti.

Stavak. *Neka su zadani prirodni brojevi x i y , takvi da je $x < y$. Označimo s B ukupan broj neporedanih parova brojeva između x i y , uključujući jedan i drugi. Onda je*

$$B = \frac{(y - x + 1)(y - x + 2)}{2}.$$



U računima su vrlo česte pogreške. Stoga je nužna i provjera rezultata. Provjerimo ovu formulu za $x = 5$ i $y = 10$:

$$\frac{(10 - 5 + 1)(10 - 5 + 2)}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21.$$

U redu je!



Pozdrav

I na samom kraju, jedna mala opaska čitatelju o tome kako je nastao ovaj članak. Prvi autor ovoga članka, velečasni gospodin Niko Radić, je svećenik na otoku Krku, u

malom mjestu Korniću pored Punta. Prvi dio članka objavljen je 25. srpnja 1998. g. u župskom listiću "TIKVICA svetog Jakova", koji uređuje pop Niko (tako otočani na Krku zovu svoje svećenike; 'pop' dolazi od grčkog papas = otac; otok Krk je vrlo davno bio pod grčkom vlašću). A drugi autor, Darko Žubrinić, stupio je u kontakt s ocem Radićem putem elektronske pošte (e-mail), i zamolio ga da napišemo ovaj članak. Iako se još nismo osobno vidjeli i upoznali, znamo se već nekoliko godina. Stoga ovim putem šaljem najljepše pozdrave popu Niki; i svim popovima glagoljašima na otoku Krku. A čitatelji "Matematike i škole" šalju puno pozdrava čitateljima TIKVICE.

VELIKI BROJEVI

Kako zapisivati velike brojeve? Na to pitanje znademo odgovor. A kako čitati zapise takvih brojeva? Odgovor ćete naći u ovoj tablici.

Broj	Američki i moderni britanski naziv	Tradicionalni britanski i europski naziv
1, 000, 000 (10^6)	milijun	milijun
1, 000, 000, 000 (10^9)	bilijun	u Britaniji: tisuću milijuna; u kontinentalnoj Europi: milijarda
1, 000, 000, 000, 000 (10^{12})	trilijun	bilijun
1, 000, 000, 000, 000, 000 (10^{15})	kvadrilijun	tisuću bilijuna
1, 000, 000, 000, 000, 000, 000 (10^{18})	kvintilijun	trilijun
1, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 (10^{21})	seksbilijun	tisuću trilijuna
1, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 (10^{24})	septilijun	kvadrilijun
1, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 (10^{27})	oktilijun	tisuću kvadrilijuna
1, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 (10^{30})	nanilijun	kvintilijuna
1, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 (10^{33})	decilijun	tisuću kvintilijuna

*I evo još jedne zanimljivosti: Broj 10^{100} zove se **googol**, a naziv potječe od Milтона Sirrote koji ga je izmislio kao devetogodišnji dječak. Milton je nećak američkog matematičara Edwarda Kasnera. **Googolplex** je broj zapisan znamenkom 1 iza koje slijedi googol ničica.*

