Maturalne zadaće iz matematike

Preteško, primjereno ili prelagano? Prosudite sami!

Gimnazija, Varaždin

Varaždinska Gimnazija osnovana je 1636. godine, baš kao i Harvard University. U tako dugom razdoblju Gimnazija je prošla sve faze od nastave na latinskom samo za muške do današnjih gimnazijskih programa i gotovo dvotrećinske većine djevojaka.

U svakoj generaciji imamo tri razreda prirodoslovno-matematičke i jedan razred jezične, a ostalo su opće gimnazije, ukupno 37 razreda. Đaka ima otprilike 1200, a profesora nešto više od šezdeset — od toga nas je sedmero matematičara. Članak će opisati "zanatski" dio posla oko pripreme mature.

Kako imamo dosta razreda i profesora, uvijek nas je dvoje ili troje koji imamo maturalne razrede za svaku vrstu gimnazije (opća, odnosno prirodoslovna). Kada dođe vrijeme, dogovorimo se za termin kad ćemo se sastati i svatko donese jedan prijedlog pismenog ispita. Tako osiguramo da nema pet zadataka iz analitičke geometrije, a nijedan iz stereometrije. Dogovorimo se koji će od zadataka iz tih prijedloga biti u varijanti A, od preostalih sastavimo varijantu B, pa isto tako i C. Ako ustanovimo da neki zadatak ne odgovara, izbacimo ga, a ako koji nedostaje, prolistamo po zbirkama.

Svatko donosi zadatke s rješenjima da kod izbora vidimo koji ima ljepše brojeve, ima li koji s trikom i koji traži više pisanja. To je također kriterij kod izbora, a već imamo i mali putokaz za bodovanje. Slijedi pismeni ispit koji smo dali u prirodoslovno-matematičkoj gimnaziji u lipnju 1999.

1. Prvi član geometrijskog niza je vrijednost izraza

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}-\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

za $x=\frac{17\pi}{6}$, a kvocijent je rješenje od $\log(3x-5)-\frac{1}{2}\log(x+1)=1-\log 5$. Riješi sustav $x-y=\frac{z}{9}$, $x+y=23$, $5x=z-y-8$ i ispitaj je li x član niza.

2. Stranice trokuta čine aritmetički niz. Opseg trokuta je 15, a najveći kut $\alpha = 120°$. Odredi stranice, kutove i površinu trokuta te oplošje i volumen tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko pravca koji prolazi vrhom trokuta i paralelan je s najvećom stranicom.

3. Na elipsu $x^2 + 3y^2 = 48$ povučene su tangente iz $T(0,8)$ koje elipsu diraju u D_1 i D_2. To su ujedno tangente na kružnicu s istim diralištima. Izračunaj površinu četverokuta TD_1SD_2 gdje je S središte kružnice.

4. Zadane su funkcije $f(x) = 6x^2 - 11x + 4$ i $g(x) = \cos x$. Odredi domenu od $\sqrt{(f \circ g)(x)}$.

5. Nacrtaj graf od $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 - 3}{2x^2 - x^4}$.

Kod ocjenjivanja se držimo skale iz prijedloga Ministarstva iz 1994. godine. Dogovorimo se i za smjernice kod bodovanja za svaki zadatak. Za ovaj pismeni ispit to izgleda ovako:

1. Svaki dio zadatka (izraz, jednadžba, sustav, niz) po 5 bodova.

2. Stranice 6 bodova, kutovi i površina 3 boda, volumen 5 bodova, oplošje 6.

3. Tangente, dirališta, središte, površina po 5 bodova.

4. Ispravno određena $\sqrt{(f \circ g)(x)}$ 5 bodova, kvadratna nejednadžba 5 bodova i trigonometrijska nejednadžba 10 bodova.

5. Domena, vertikalne asimptote, ekstremi i ustanovljavanje jesu li minimum ili maksimum po 2 boda, horizontalne asimptote 3, kose 1 bod, f' 4 boda i crtež 4 boda.

Na samom ispitu svaki učenik dobije papir sa zadatcima. Dozvoljavamo kalkulator i *kartone s formulama*, nasljednike logaritamskih tablica. Piše se punih 240 minuta!

Zadatke sa starih pismenih ispita dajemo u travnju zajedno s materijalima za usmeni ispit. Običavamo dati svima sve zadatke koje imamo bez obzira na vrstu gimnazije jer na svakom piše za koga je namijenjen, a i poučno je vidjeti kako izgledaju tuđi zadatci. Na usmenom ispitu na papirićima se nalaze po dva *zadatka* i jedno *pitanje*. Ove godine opća gimnazija je dobila 33 pitanja i 66 zadataka (imaju 3 sata tjedno), a prirodoslovna 55 pitanja i 110 zadataka (imaju 5 sati tjedno). Veće promjene radimo svakih nekoliko godina i sada već imamo zalihu od preko 200 zadataka za usmeni dio ispita.

Zadatci za pismeni dio ispita nemaju rezultate, a za usmeni imaju. U materijalima se nalazi nekoliko listića s kompletnim oglednim rješenjima da bi učenici vidjeli kako treba i formalno izgledati rješenje nekog zadatka. Učenike pripremamo i za nastup na usmenom dijelu ispita.

Pripremanje mature zahtijeva dobru suradnju svih kolega matematičara na školi i to ne samo u vrijeme trajanja mature, već i pri njezinoj pripremi.

U velikoj školi poput naše i logistika (izrada materijala za pripremu, ispitnih listića, umnažanje, ovjeravanje materijala itd.) također je zamjetan posao.

U 1999. godini maturi je pristupilo stotinjak učenika, od čega 25 iz pet razreda općeg smjera. Uspjeh maturanata iz opće gimnazije je bio je bolji zato što su to po upisu bolji učenici, a i sami su matematiku odabrali kao jedan od predmeta mature.

Sama je matura u vrijeme trajanja obavijena velom tajnosti. Ne znamo kako se u isto vrijeme radi na drugim školama. Ovo je dobra prigoda da prikažemo kako se radi na našoj školi, ali i da čujemo kako to rade drugi.

Nadam se da će ovaj prilog biti zanimljiv iskusnim kolegama, a i koristan onima koje matura tek čeka.

Stanislav Husak, Varaždin

Prva hrvatska sušačka gimnazija, Rijeka

Pismeni ispit iz matematike na maturi

u ljetnom roku šk. god. 1998./ 99.
za prirodoslovno-matematičku
gimnaziju

1. Zadana je funkcija

$$f(x) = \left|\left|\frac{1}{2}x - 1\right| - 3\right|.$$

a) Zapiši funkciju f bez znaka apsolutne vrijednosti i nacrtaj njen graf u koordinatnoj ravnini.

b) Odredi kompleksni broj čiji prikaz u koordinatnoj ravnini odgovara točki lokalnog maksimuma grafa funkcije f.

c) Kompleksan broj iz b) je jedno rješenje jednadžbe $z^3 - 5z^2 + 17z - 13 = 0$. Nađi sva rješenja.

2. Pravac $x - y + 1 = 0$ dira parabolu $y^2 = 2px$ i kružnicu, sa središtem na osi y, u istoj točki. Odredi:

a) jednadžbe parabole i kružnice;

b) površinu trokuta čiji su vrhovi fokus parabole i dirališta tangenata povučenih iz fokusa na kružnicu;

c) kut pod kojim se vidi kružnica iz fokusa parabole.

3. U kružnici polumjera r zadane su tetive $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ duljina $|AB| = 8\,\text{cm}$ i $|AC| = 5\,\text{cm}$. Kut između njih je manje rješenje jednadžbe

$$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

a) Izračunaj r.

b) Pod kojim kutom se tetiva $\overline{AB}$ vidi iz središta kružnice?

c) Trokut ABC rotira oko, po duljini, srednje stranice. Izračunaj oplošje i obujam tijela nastalog tom rotacijom.

d) U kakvom su odnosu obujam kugle upisane u dobiveno rotacijsko tijelo i obujam tog tijela?

4. Odredi za koje vrijednosti x šesti član razvoja binoma

$$\left[\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right]^n$$

iznosi 21, ako se zna da su binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana razvoja redom prvi, treći i peti član aritmetičkog niza.

5. Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{4}{x(x+2)}$. Prikaži graf funkcije f u koordinatnom sustavu naznačivši područje definicije, asimptote, nultočke i ekstremne vrijednosti.

Zadatke dostavile: Ivanka Bujan-Slamić i Mirena Ćoza, Rijeka

XV. gimnazija, Zagreb

Matematika je obvezan predmet na maturi za sve učenike naše škole. Učenici moraju pisati zadaću i kasnije usmeno odgovarati. Kako su na maturi uglavnom učenici koji nisu odlični matematičari, profesori naše škole svake godine organiziraju ponavljanje. Čim završi nastava, tri puta tjedno održavamo nastavu matematike. Ponovimo svu teoriju koja dolazi na usmenom dijelu ispita, te rješavamo ili zadatke sa starih matura ili zadatke s prijemnih ispita raznih fakulteta. Odaziv učenika na ovakvo ponavljanje je vrlo velik. Da bismo im olakšali pismeni ispit, svake godine imamo i pokusnu maturalnu zadaću. Ta zadaća se sastavlja i ispravlja po istim principima kao i prava maturalna zadaća. Kasnije se svi zadaci prodiskutiraju i po potrebi objasne. Tako omogućujemo slabijim učenicima bolje znanje, a time i bolje ocjene.

Maturalna zadaća ima 5 zadataka, a svaki zadatak po nekoliko podzadataka. Svaki korak se boduje. Budući da u školi imamo dva programa (A program sa 4 sata tjedno u 1. i 2. razredu, a sa 5 sati tjedno u 3. i 4. razredu i B program koji ima 1 sat više u svakom razredu) moramo imati i dvije maturalne zadaće. Zadaće za A i B program se razlikuju u jednom kompletnom zadatku, te u nekoliko podzadataka.

Maturalna zadaća iz matematike

(B program)

21. lipnja 1999.

1. Za kompleksne brojeve w i z vrijedi $w = \dfrac{z-4+6i}{z+2}$.

a) Odredi skup kompleksnih brojeva z za koje je w čisto imaginaran broj.

b) Odredi skup kompleksnih brojeva z za koje je w realan broj.

c) Nacrtaj skupove iz a) i b) u istom koordinatnom sustavu i odredi njihov zajednički element z_1.

d) Provjeri da je kompleksan broj z_1 rješenje jednadžbe $2z^4 - 15z^3 + 93z^2 + 76z - 156 = 0$. Odredi i preostala rješenja te jednadžbe.

2. a) Izračunaj $a_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} + \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-7})$.

b) Neka je a_2, $a_2 \neq a_1$ rješenje jednadžbe $2^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3)} = 1$.

c) Neka su a_1 i a_2 prva dva člana geometrijskog reda. Odredi njegov broj S.

d) Izračunaj površinu dijela ravnine omeđenog grafom funkcije $f(x) = e^{2x}$ i pravcima $x = 0$ i $x = S$.

3. Graf polinoma trećeg stupnja prolazi točkama $A(0,4)$, $B(1,\ 15)$, $C(2,8)$, $D(-1,-37)$.

a) Odredi taj polinom.

b) Odredi ekstremne vrijednosti polinoma $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$, pa nacrtaj njegov graf.

c) Ordinate točaka ekstrema iz b) zadatka su prvi, odnosno deseti član rastućeg aritmetičkog niza, a njihove apscise prvi, odnosno treći član rastućeg geometrijskog niza. Odredi te nizove.

d) Koliko prvih članova tog aritmetičkog niza ima isti zbroj kao i prva četiri člana geometrijskog niza?

4. Zadan je trokut $A(4,2)$, $B(-4,2)$, $C(0,-2)$.

a) Asimptota hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ prolazi točkom A, a linearni ekscentricitet joj je $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Odredi jednadžbu te hiperbole.

b) Neka je E skup svih točaka ravnine za koje je zbroj kvadrata udaljenosti od stranica trokuta ABC jednak 12. Odredi jednadžbu skupa E.

c) Na sreću odabrana točka $T(x,y)$ zadovoljava uvjete $y \leq 2$, $x - y \leq 2$, $x + y \geq -2$. Kolika je vjerojatnost da za tu točku vrijedi $|x| \geq 2$?

d) Odredi volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x dijela ravnine između hiperbole i krivulje E.

5. Zbroj kutova α, β, γ, $(\alpha < \beta < \gamma)$ je $\dfrac{3\pi}{2}$, umnožak njihovih sinusa je $\dfrac{1}{4}$, a β je aritmetička sredina kutova α i γ.

a) Odredi najmanje pozitivne α, β, γ.

b) Neka je a najmanja, a b najveća vrijednost funkcije $f(x) = 4(\cos x + \sin^2 x)$ na intervalu $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Izračunaj obujam stošca kojemu su a i b najmanja, odnosno najveća izvodnica i kojemu je kut između tih izvodnica 2α.

Nevenka Antončić, Zagreb