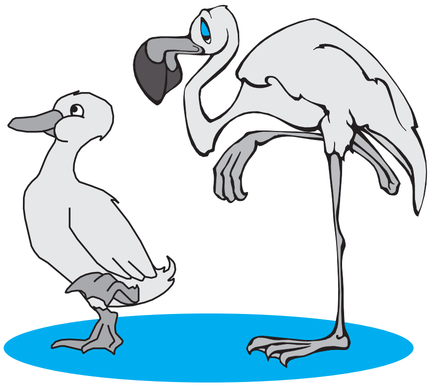


Analogija

Zdravko Kurnik, Zagreb

Jedan od važnih oblika zaključivanja jest **traduktivno zaključivanje** To je zaključivanje kod kojega se iz dvaju ili više sudova određenog stupnja općenitosti dobiva novi sud istog stupnja općenitosti. Riječ **tradukcija** potječe od latinske riječi *traductio* što znači *premještanje, prenošenje.*

Pojam analogije

Poseban oblik traduktivnog zaključivanja je **analogija** (grč. *analogia* — razmjer, sklad, pravilnost, odnos, podudarnost, srodnost). Analogija je jedna vrsta sličnosti. Međutim, treba odmah naglasiti da nije svaka sličnost analogija. Za analogiju je osim sličnosti potrebna i podudarnost objekata u određenim odnosima.

Zaključivanje po analogiji je misaoni postupak pri kojem se iz opažanja da se dva objekta podudaraju u određenom broju svojstava ili odnosa izvodi zaključak da se oni podudaraju i u drugim svojstvima ili odnosima koji se kod jednog objekta nisu izravno opažali.

Shematski prikaz:

Objekt A ima svojstva s_1, s_2,..., s_{k-1}, s_k, objekt B ima svojstva s_1^*, s_2^*,..., s_{k-1}^*. Svojstva s_1^*, s_2^*,..., s_{k-1}^* analogna su svojstvima s_1, s_2,..., s_{k-1}. Tada B ima svojstvo s_k^*.

Jasno je da zaključivanje po analogiji nije strogo, jer podudaranje objekata u dijelu svojstava ne mora nužno povlačiti njihovo podudaranje i u drugim svojstvima. Zato ono može dovesti i do sasvim netočnih zaključaka. To ne umanjuje važnost analogije za proširivanje naše spoznaje. Analogija prožima čitavo naše mišljenje, svakidašnji govor, umjetničko stvaralaštvo, ali i visoka znanstvena istraživanja. Pri tome, ona može poprimiti različite oblike. Najdublji oblik analogije je **izomorfizam** koji dovodi do potpunih i pouzdanih zaključaka.

Zaključivanje po analogiji može se u matematici provoditi u odnosu na

A) objekt,
B) svojstvo,
C) postupak.

Eulerove analogije

"Otac" metode analogije je veliki švicarski matematičar Leonhard Euler (1707. – 1783.). Opisat ćemo ukratko tri njegove poznate analogije.

1) "Mala analogija". Švicarski matematičar Jacob Bernoulli (1654. – 1705.) nije uspijevao naći sumu reda $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$, pa je javno postavio problem.

Problem je privukao Eulera koji ga rješava primjenom nove metode. On uvodi jednadžbu beskonačnog stupnja i na nju primjenjuje svojstva algebarskih jednadžbi konačnog stupnja. Nalazi da je tražena suma

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (1)$$

Problem, dakle, rješava prijelazom od konačnog ka beskonačnom. Strogo gledajući, njegov postupak nije bio ispravan, pa su bile opravdane kritike drugih matematičara. Postupak se ipak može pravdati analogijom, metodom koja će kasnije postati važno sredstvo istraživanja. Euler je vjerovao u svoje otkriće. Njegove brojne provjere ukazivale su na točnost rezultata, sve dok sam nije našao strogi dokaz. (Podroban opis ove analogije može se naći u [8], [6] i [1]).

2) "Velika analogija". Suma kutova poligona sa n stranica jednaka je $(n-2)\pi$. Vrijedi li nešto analogno za poliedre? Euler proučava ovaj problem u dva svoja znanstvena rada. Pokušaji sa sumom diedara i sumom prostornih kutova ne daju rezultata. Kao posljednju mogućnost promatra sumu $\sum \alpha$ svih kutova strana, provjerava tu sumu na nizu poliedara i za nju i broj vrhova E poliedra postavlja hipotezu

$$\sum \alpha = 2\pi E - 4\pi.$$

S druge strane dokazuje da sumu $\sum \alpha$, broj bridova K i broj strana F poliedra povezuje jednakost

$$\sum \alpha = 2\pi(K - F).$$

Posljedica ovih dviju jednakosti je nova hipoteza

$$E - K + F = 2. \qquad (2)$$

Problem o kutovima, rješenje bez kutova! Formulu (2) otkrio je Euler 1752. godine i ona se danas naziva **Eulerova formula**. (Podroban opis ove analogije može se naći u [9], [6] i [1]).

3) Euler 1738. godine rješava jednadžbu četvrtog stupnja $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ analogno Vièteovom načinu rješavanja jednadžbe trećeg stupnja $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Proučavanje Eulerovih analogija je najbolji način uvođenja mladih matematičara u istraživački rad.

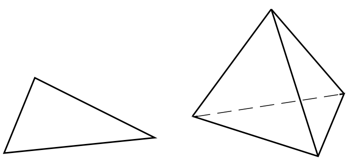
Analogija u nastavi matematike

Analogija je vrlo korisna i u nastavi matematike. Tijekom nastavnog sata nastavnik često govori ili pita: "slično se izvodi", "analogno se dobiva", " na isti način se dokazuje", "trokuti se podudaraju", "ovo je srodan zadatak", "u kojem su odnosu promatrani likovi?", "sada možemo ponoviti opisani postupak", "što u prostoru odgovara pravokutniku?" i sl. Te jednostavne rečenice imaju dubok smisao i važan cilj. Ponavljanjem takvog načina govora u svom izlaganju nastavnik svjesno ukazuje na analogiju. Tako ona postaje zorno sredstvo povezivanja i lakšeg savladavanja nastavnog gradiva, te sredstvo razvijanja stvaralačkog mišljenja i kreativnosti učenika. Pri rješavanju nekog problema učenici se usmjeravaju na razmatranje nekog bliskog, srodnog problema i oponašanje postupka njegova rješavanja. U težim slučajevima analogija možda neće biti od stvarne pomoći, ali može ukazati na smjer kojim treba nastaviti rješavanje. Područje matematike u kojem se mogu naći mnoge analogije svakako je geometrija. Prijelaz iz ravnine u prostor, iz planimetrije u stereometriju primjenom analogije može obogatiti znanje učenika, često bez velikog truda. Prema onom što je ranije rečeno, postoje tri smjera primjene analogije: uočavanje analognih objekata, otkrivanje analognih svojstava i provođenje analognih postupaka. Opišimo ih.

A) ANALOGNI OBJEKTI. Matematika proučava veliki broj objekata. Ti su objekti prema određenoj svojoj srodnosti i unutarnjoj strukturi same znanosti već razvrstani u skupove: brojevi, relacije, funkcije, jednadžbe, grupe, poligoni, poliedri, obla tijela, plohe, determinante, matrice i dr. Međutim, nije rijedak slučaj da se nalaze i proučavaju objekti iz istog skupa ili iz različitih skupova koji su vrlo srodni. Takvi su na primjer **izomorfni objekti**. Upoznavanje učenika s analogijom može početi otkrivanjem analognih objekata. Najjednostavniji primjer analognih objekata su dužina i trokut. Međutim, moramo odmah napomenuti da analogija ne mora uvijek biti jednoznačna, pa, kao što ćemo vidjeti, neki objekt može imati više *analogona*. To ovisi o vrsti srodnosti koja se promatra.

Primjer 1. **Likovi i tijela.**

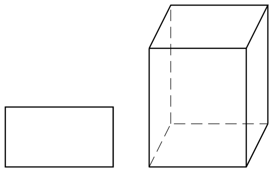
1) Trokut i tetraedar. Zašto su to analogni objekti? Objašnjenje je jednostavno. Trokut je najjednostavniji poligon, određen je najmanjim brojem nekolinearnih točaka u ravnini, tri, i omeđen s tri dužine. Tetraedar je najjednostavniji poliedar, određen je najmanjim brojem nekomplanarnih točaka u prostoru, četiri, i omeđen je sa četiri trokuta.



Sl. 1.

2) Jednakostranični trokut i pravilni tetraedar.

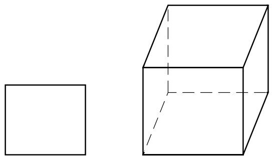
3) Pravokutnik i kvadar.



Sl. 2.

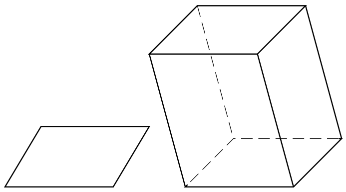
Pravokutnik: nasuprotne stranice su paralelne, nasuprotne stranice su sukladne, susjedne stranice su okomite. Kvadar: nasuprotne strane su paralelne, nasuprotne strane su sukladne, susjedne strane su okomite.

4) Kvadrat i kocka.



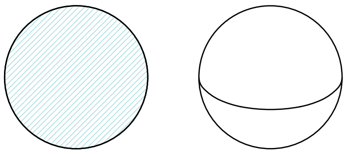
Sl. 3.

5) Paralelogram i paralelepiped.



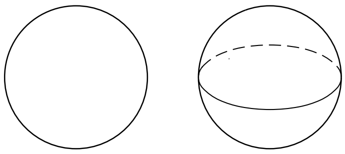
Sl. 4.

6) Krug i kugla.



Sl. 5.

7) Kružnica i sfera.



Sl. 6.

S ovim objektima učenici se upoznaju rano i poželjno je da sami uočavaju njihovu srodnost.

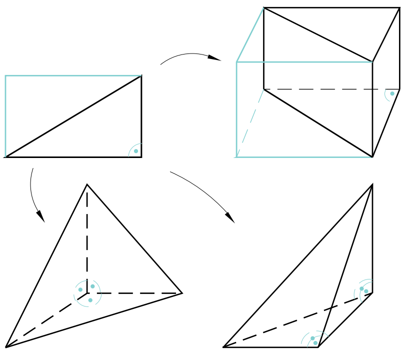
Primjer 2. Analogoni pravokutnog trokuta.

Pravokutni trokut može se promatrati na tri različita načina. To dovodi do srodnosti s tri prostorna objekta.

1) Promatramo li pravokutni trokut kao polovicu pravokutnika, njegov analogon bit će polovica kvadra, tj. uspravna trostrana prizma kojoj je osnovka pravokutni trokut.

2) Promatramo li pravokutni trokut kao trokut kojemu su stranice iz jednog vrha okomite, njegov analogon bit će tetraedar kojemu su bridovi iz jednog vrha međusobno okomiti.

3) Promatramo li pravokutni trokut kao trokut čije dvije okomite stranice tvore otvorenu izlomljenu liniju, njegov analogon bit će tetraedar čija tri međusobno okomita brida tvore otvorenu izlomljenu liniju, tj. tetraedar omeđen pravokutnim trokutima.



Sl. 7.

B) ANALOGNA SVOJSTVA. Osim najjednostavnijih svojstava na temelju kojih se zaključuje da su određeni objekti analogni, objekti mogu imati slična i druga svojstva. Ako jedan jednostavniji objekt ima neko takvo svojstvo, analogija nam pomaže da naslutimo kakvo bi slično svojstvo mogao imati njegov složeniji analogon. Ilustrirat ćemo prenošenje svojstava na nekoliko primjera.

Primjer 3. Pravila.

Raznovrsnost matematičkog gradiva zahtijeva podrobnu analizu toga gradiva i uočavanje i izdvajanje pojedinih njegovih dijelova koji su posebno važni i koje treba pamtiti. Među takve dijelove ubrajaju se i razna pravila, posebno pravila za brojeve. Evo nekih od njih:

$$(ab)^2 = a^2b^2, \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b},$$
$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (ab)^n = a^n b^n,$$
$$|ab| = |a|\cdot|b|, \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$
$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}, \qquad \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2},$$
$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,$$
$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

i dr.

Metodika ovdje ukazuje na potrebu da se nakon dokaza nekog od gornjih pravila ono najprije proširi na više od dva broja, pa tek onda prijeđe na primjenu. Proširenje se postiže jednostavnom analogijom. U slučaju prvog pravila to izgleda ovako:

$$(ab)^2 = a^2b^2 \xrightarrow{\text{analogija}} (abc)^2 = a^2b^2c^2,$$
$$(abcd)^2 = a^2b^2c^2d^2,$$
$$(abc)^2 = (ab)^2c^2 = a^2b^2c^2,$$
$$(abcd)^2 = (abc)^2d^2 = a^2b^2c^2d^2.$$

Analogno se iskazuju i dokazuju proširenja ostalih pravila. Daljnji korak u razvoju mišljenja učenika bilo bi **poopćavanje** tih pravila.

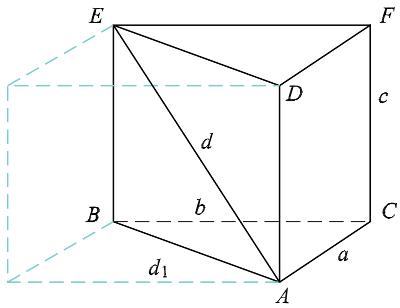
Primjer 4. Vièteove formule.

Za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$ vrijede Vièteove formule $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Primjenom analogije zaključujemo da bi za rješenja x_1, x_2 i x_3 kubne jednadžbe $ax^3+bx^2+cx+d=0$ mogle vrijediti Vièteove formule $x_1+x_2+x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$, $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$.

Primjer 5. **Analogoni Pitagorina poučka.**

Ranije smo vidjeli da postoje tri prostorna analogona pravokutnog trokuta. Postoje li i odgovarajuće relacije analogne Pitagorinu poučku? Razmotrimo svaki od navedenih analogona posebno.

1) Neka je $ABCDEF$ trostrana prizma dobivena dijagonalnim presjekom kvadra i $|CA| = a$, $|CB| = b$, $|CF| = c$, $|AB| = d_1$, $|AE| = d$.



Sl. 8.

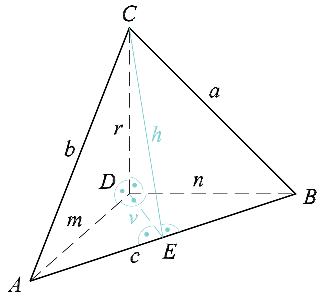
Pogledajmo što će nam dati srodnost pravokutnog trokuta i te trostrane prizme proizašle iz srodnosti pravokutnika i kvadra. Iz pravokutnih trokuta ABE i ABC dobivamo $d^2 = d_1^2 + c^2$, $d_1^2 = a^2 + b^2$, a odavde proizlazi

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \qquad (3)$$

Relacija (3) izražava vezu duljine dijagonale polaznog kvadra i duljina njegovih bridova iz jednog vrha. Ona je prvi prostorni analogon Pitagorina poučka. Njezin oblik nije bilo teško naslutiti.

2) Neka je $ABCD$ tetraedar kojemu su bridovi iz vrha D međusobno okomiti, m, n, r duljine tih bridova, a a, b, c duljine ostalih bridova.

Što je analogno Pitagorinom poučku? Sada nasuprot vrhovima leže trokuti pa se može istraživati veza među površinama tih trokuta. Nije je teško naslutiti. Ako su p_A, p_B, p_C, p_D površine strana tetraedra $ABCD$ nasuprot vrhovima A, B, C, D, ta bi veza mogla imati ili oblik $p_D^3 = p_A^3 + p_B^3 + p_C^3$ (porast i dimenzije i eksponenta za 1) ili $p_D^2 = p_A^2 + p_B^2 + p_C^2$ (porast samo dimenzije za 1). Prva jednakost nije valjana, ali druga jest. Da bismo je dokazali, povučene su u trokutima ABD i ABC na slici još visine iz vrhova D i C duljina v i h.



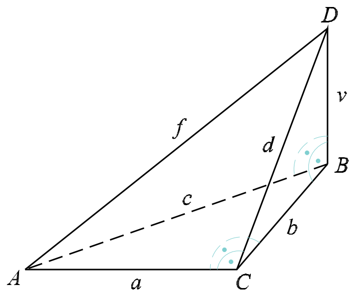
Sl. 9.

U trokutu CDE vrijedi jednakost $h^2 = r^2 + v^2$, koja množenjem sa c^2 poprima oblik $c^2h^2 = c^2r^2 + c^2v^2$. Budući da je $c^2 = n^2 + m^2$, imamo dalje redom

$$c^2h^2 = (n^2 + m^2)r^2 + c^2v^2,$$
$$c^2h^2 = n^2r^2 + m^2r^2 + c^2v^2,$$
$$4p_D^2 = 4p_A^2 + 4p_B^2 + 4p_C^2,$$
$$p_D^2 = p_A^2 + p_B^2 + p_C^2. \qquad (4)$$

Relacija (4) je drugi prostorni analogon Pitagorina poučka. Ona se može izvesti i primjenom Heronove formule na trokut ABC.

3) Neka je $ABCD$ tetraedar kojemu su bridovi $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ duljina a, b, v u parovima okomiti i neka su c, d i f duljine ostalih bridova.



Sl. 10.

Označimo sa p_A, p_B, p_C, p_D površine strana tetraedra nasuprot vrhovima A, B, C, D. Ponovo tražimo vezu među navedenim površinama. Međutim, u slučaju ovog analogona pravokutnog trokuta tu vezu nije lako naslutiti. Pokušajmo opet s kvadratima površina. Imamo

$$p_A^2=\frac{1}{4}b^2v^2,$$

$$p_B^2=\frac{1}{4}a^2d^2=\frac{1}{4}a^2(v^2+b^2)=\frac{1}{4}a^2v^2+\frac{1}{4}a^2b^2,$$

$$p_C^2=\frac{1}{4}v^2c^2=\frac{1}{4}v^2(a^2+b^2)=\frac{1}{4}a^2v^2+\frac{1}{4}b^2v^2,$$

$$p_D^2=\frac{1}{4}a^2b^2.$$

Pogledamo li pažljivije ove četiri jednakosti, uočit ćemo da tražena veza među promatranim površinama glasi

$$p_A^2-p_C^2+p_B^2-p_D^2=0. \tag{5}$$

Relacija (5) je treći prostorni analogon Pitagorina poučka, ovaj put napisanog u obliku $a^2-c^2+b^2=0$.

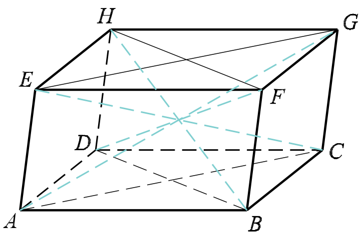
Primjer 6. Analogoni Newtonove relacije.

U paralelogramu $ABCD$ je suma kvadrata duljina dijagonala jednaka sumi kvadrata duljina svih četiriju stranica, tj.

$$|AC|^2+|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2+|BC|^2+|CD|^2. \tag{6}$$

Nađimo analognu stereometrijsku relaciju.

Rješenje. Kao analogon paralelograma promatrat ćemo paralelepiped $ABCDEFGH$.



Sl. 11.

1) Stranicama i dijagonalama paralelograma očito odgovaraju bridovi i prostorne dijagonale paralelepipeda. Neka je $\sum b^2$ suma duljina svih 12 bridova paralelepipeda i $\sum d^2$ suma kvadrata duljina njegove 4 prostorne dijagonale. Tražena analogna relacija trebala bi imati oblik

$$\sum d^2=\sum b^2. \tag{7}$$

Je li relacija (7) valjana? Odgovor je potvrdan. Valjanost te relacije slijedi promatranjem najprije relacija (6) za paralelograme $ACGE$ i $BDHF$ i njihovim zbrajanjem, a onda uvažavanjem relacija (6) za paralelograme $ABCD$ i $EFGH$.

2) Postoji još jedna relacija analogna relaciji (6). Treba samo umjesto prostornih dijagonala paralelepipeda promatrati njegove plošne dijagonale. Neka je $\sum p^2$ suma kvadrata duljina svih 12 plošnih dijagonala. U ovom slučaju teže je naslutiti vezu suma $\sum p^2$ i $\sum b^2$, ali je zato jednostavnije naći tu vezu. Dovoljno je primijeniti relaciju (6) na 6 paralelograma, strana paralelepipeda i dobivene jednakosti zbrojiti. Dobiva se relacija

$$\sum p^2=2\sum b^2. \tag{8}$$

Primjer 7. Trokut i tetraedar.

Trokut od svih poligona ima najviše svojstava. Ta svojstva mogu nas primjenom analogije dovesti do sličnih svojstava njegovog prostornog analogona – tetraedra. Dio tog bogatstva matematičkih ideja čitatelj može naći u navedenoj literaturi. Naravno, ne treba očekivati da svako svojstvo trokuta ima svoj prostorni analogon. To dobro pokazuje sljedeća analogija:

> Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.
>
> Pravci na kojima leže visine tetraedra sijeku se u jednoj točki.

Druga tvrdnja dobivena analogijom nije istinita za svaki tetraedar.

* * *

C) ANALOGNI POSTUPCI. Osim uočavanja srodnih objekata i postavljanja hipoteza prenošenjem svojstava s jednog objekta na drugi, važan je i treći smjer istraživanja u vezi s analogijom. Prenesena svojstva treba dokazati. Nije rijedak slučaj da se i među postupcima prenošenja i dokazivanja može uočiti izvjesna sličnost. To u nastavi matematike treba iskoristiti u svrhu još čvršćeg povezivanja nastavnog gradiva.

Primjer 8. Izbor iz nastavnog gradiva.

1) Dokazi tvrdnji da je svaka točka simetrale dužine jednako udaljena od njezinih krajeva i svaka točka simetrale kuta jednako udaljena od njegovih krakova su analogni.

2) Formule $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ i $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ za duljine visina jednakostraničnog i jednakokračnog trokuta, $d = a\sqrt{2}$ i $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ za duljine dijagonala kvadrata i pravokutnika, $d = \sqrt{3}$ i $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ za duljine dijagonala kocke i kvadra analogno se izvode.

3) Vièteove formule $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ za kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$ dobivaju se iz formula za rješenja x_1 i x_2. No, one se mogu dobiti i iz prikaza kvadratne jednadžbe u obliku $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ i uspoređivanjem koeficijenata. Taj način izvođenja može se prenijeti na izvođenje Vièteovih formula za kubnu jednadžbu $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$, pa i za jednadžbe višeg stupnja.

4) Pri obradi kvadratne funkcije $f(x) = ax^2$ razlikuju se dva slučaja: $a > 0$ i $a < 0$. Obrada prvog slučaja počinje promatranjem posebnih funkcija $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 2x^2$, prave se tablice vrijednosti tih funkcija, crtaju grafovi i na kraju izvode neka njihova svojstva. Obrada drugog slučaja je, uz male preinake, posve analogna. To je pogodan trenutak za izmjenu nastavne metode.

5) Postoji očita sličnost formule $p(ABCD) = ab$ za površinu p pravokutnika $ABCD$ s duljinama stranica a i b i formule $v(ABCDEFGH) = abc$ za obujam v kvadra $ABCDEFGH$ s duljinama bridova a, b i c. Valjanost prve formule dokazuje se razmatranjem tri slučaja: $a, b \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{Q}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Valjanost druge formule dokazuje se analogno (v. [4]).

6) Prva jednakost $a \sin\beta = b \sin\alpha$ poučka o sinusima za trokut ABC izvodi se pomoću visine iz vrha C i trigonometrije pravokutnog trokuta. Analogno se izvodi druga jednakost $b \sin\gamma = c \sin\beta$, a iz dobivenih jednakosti i cijeli poučak.

7) Definicije $r_1+r_2 = 2a$ i $|r_1-r_2| = 2a$ elipse i hiperbole su očito slične. Pokazuje se da se slično postavljaju koordinatni sustavi i izvode jednadžbe $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ tih krivulja.

Mnogo je ovakvih primjera u školskoj matematici. Svi oni pokazuju koliko je važna primjena analogije u nastavnom procesu. Nastavno gradivo se povezuje, predavanje pojednostavnjuje, određeno ranije usvojeno gradivo se ponovo obnavlja i utvrđuje, a novo gradivo brže savladava. Međutim, još je važnije što analogija daje nastavniku mogućnost neprestane izmjene nastavnih oblika i metoda u svrhu postizanja učinkovitije nastave. Navedimo neke od tih izmjena:

Zamjena rada s homogenim grupama individualnim radom , uvođenje grupnog rada, zamjena metode dijaloga metodom rada s tekstom, zamjena metode dijaloga heurističkom metodom, prijelaz dijaloga u heuristički dijalog, zamjena heurističke nastave problemskom nastavom, primjena znanstvenih metoda na primjerenim mjestima.

* * *

Pogledajmo sada jedan primjer s jednadžbama kakve se pojavljuju na matematičkim natjecanjima.

Primjer 9. Riješimo sustave jednadžbi ($abc \neq 0$):

$$y+z=a, \quad x+z=b, \quad x+y=b,$$

$$\frac{yz}{y+z}=\frac{1}{a}, \quad \frac{xz}{z+z}=\frac{1}{b}, \quad \frac{xy}{x+y}=\frac{1}{c},$$

$$x^2z^2+x^2y^2=axyz, \quad y^2z^2+y^2x^2=bxyz,$$
$$z^2y^2+z^2x^2=cxyz.$$

Može li se uočiti neka srodnost ovih sustava? Na prvi pogled postoji izvjesna srodnost, možda ne velika, ali prava srodnost otkrit će se tek pri njihovom rješavanju. Prvi sustav je linearan, jednostavan i način njegovog rješavanja očigledan. To bi moglo značiti povoljnu okolnost i za rješavanje druga dva sustava.

Riješimo prvi sustav. Zbrajanjem svih triju jednadžbi dobivamo najprije da je $x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$. Oduzimanjem redom prve, druge i treće jednadžbe od dobivene jednadžbe nalazimo traženo rješenje

$$x=\frac{b+c-a}{2}, \qquad y=\frac{a+c-b}{2},$$
$$z=\frac{a+b-c}{2}.$$

Rješavanje drugog sustava brzo se dade svesti na rješavanje prvog sustava. Dovoljno je uzeti recipročne vrijednosti strana jednadžbi i lijeve strane razložiti na pribrojnike. Nalazimo

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=a, \qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=b,$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=c.$$

Dalje ponavljamo prethodni postupak za recipročne vrijednosti nepoznanica.

Treći sustav je najteži. Ipak, dosta se lako dade zaključiti da su trojke brojeva $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$ rješenja sustava. Razmotrimo još slučaj $xyz \neq 0$. Svođenje na sustav sličan prvom postižemo dijeljenjem svih jednadžbi sa $x^2y^2z^2$:

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{a}{xyz}, \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{b}{xyz},$$
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{c}{xyz}.$$

Sada se opisanim postupkom sustav rješava po recipročnim vrijednostima kvadrata nepoznanica (umnožak xyz uzimamo kao konstantu!), zatim se množenjem svih dobivenih jednakosti određuje umnožak xyz i na kraju nalazimo nepoznanice x^2, y^2 i z^2, odnosno x, y i z.

* * *

Naša razmatranja završit ćemo mišljenjem o analogiji dvojice velikih matematičara:

> **Glavna sredstva pomoću kojih se otkrivaju istine u matematici su indukcija i analogija.**
>
> **(Laplace)**

> **Matematičar je čovjek koji umije naći analogije među tvrdnjama, bolji matematičar je onaj koji pronalazi analogije među dokazima, najbolji matematičar je onaj koji uočava analogije teorija, no može se zamisliti i onog koji među analogijama vidi analogije.**
>
> **(Banach)**

Literatura

[1] I. Jurić, *Analogija*, Diplomski rad, Zagreb 1999.

[2] Z. Kurnik, *Visine tetraedra*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 5 (1996), 80–85.

[3] Z. Kurnik, *Eulerove sfere ortocentričkog tetraedra*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 7 (1998), 92–98.

[4] Z. Kurnik, V. Volenec, *Matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb 1978.

[5] P. MLADINIĆ, *Trokut i tetraedar*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore 4 (1995), 12–23.
[6] B. PAVKOVIĆ, *Metoda analogije i primjene u nastavi*, Matematika 1 (1988), 20–27.
[7] G. POLYA, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prijevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb 1956.
[8] G. POLYA, *Matematika i pravdopodobnye rassuždenija* (prijevod s engleskog), Moskva 1957.
[9] G. POLYA, *Matematičeskoe otkrytie* (prijevod s engleskog), Nauka, Moskva 1976.
[10] M. RADIĆ, *Neke analogije između trokuta i tetraedra*, Matematika 3 (1990), 13–22.

PITAGORINE TROJKE

U prošlom smo broju MŠ-a pokazali kako na jednostavan način možemo nalaziti trojke prirodnih brojeva a, b i c koje su duljine stranica pravokutnog trokuta.

Evo još jednog jednostavnog postupka određivanja **Pitagorinih trojki:**

Neka je $z = 2 - i$ kompleksni broj. Prisjetimo se da je i imaginarna jedinica, broj čiji je kvadrat jednak -1.

Kvadrirajmo broj z :

$$z^2 = (2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i.$$

Prirodni brojevi $a = |3| = 3$ i $b = |-4| = 4$ duljine su kateta pravokutnog trokuta kojem je duljina hipotenuze $c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$ također prirodni broj.

Možemo pokušati i s drugim primjerima:

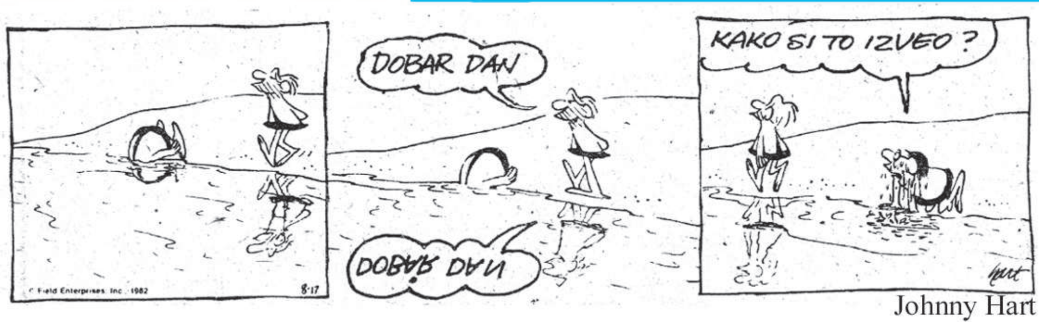
$$(1+4i)^2 = -15+8i, \qquad a^2+b^2 = 15^2+8^2 = 289 = 17^2;$$
$$(-2+5i)^2 = -21-20i, \quad a^2+b^2 = 21^2+20^2 = 841 = 21^2.$$

Nije se teško uvjeriti kako ovaj postupak uistinu uvijek daje **Pitagorine trojke**. *Neka je $z = x + yi$, gdje su x i y cijeli brojevi. Tada je $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.*

Stavimo li $a = |x^2 - y^2|$, $b = 2|xy|$, imat ćemo: $a^2 + b^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 = c^2$.

* * *

B.C.PRETPOTOPNJACI



Johnny Hart