# Težište trokuta

**Branimir Dakić, Zagreb**

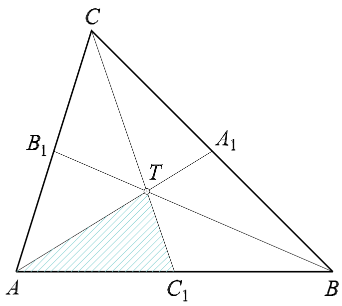
Pojmu težišta u nastavi geometrije osnovne i srednje škole ne pridjeljuje se pozornost koja bi mu zbog njegove važnosti bila primjerena. Nešto se temeljitije težištem i raznim geometrijskim svojstvima vezanim uz njega bavimo u analitičkoj geometriji ravnine u trećem razredu srednje škole. Nije to baš najprirodnije mjesto, ali valja iskoristiti barem taj trenutak i težištem se pozabaviti malo detaljnije.

Evo jednog zadatka čije rješavanje povlači niz vrlo jednostavnih razmatranja, koja će, premda je zadatak srednjoškolski, zasigurno pobuditi interes i učitelja osnovnih škola.

**Zadatak.** Točke $A_1(3,2)$ i $C_1(1,1)$ polovišta su stranica $\overline{BC}$ odnosno $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$, točka $T(-1,3)$ njegovo je težište. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?

► Standardno zadatak rješavamo na sljedeći način:

Točka $A_1$ polovište je stranice $\overline{BC}$, te je zato $x_B + x_C = 6$. No $x_T = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ i slijedi $x_A = -9$.



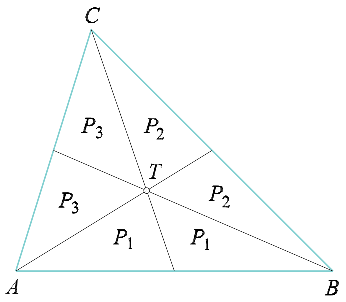

*Sl. 1.*

Analogno, jer je $y_B + y_C = 4$, iz $y_T = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$ slijedi $y_A = 5$.

Tako smo odredili točku $A(-9,5)$.

Lako je sada odrediti i točke $B(11,-3)$ i $C(-5,7)$, i zatim po formuli $P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ izračunati površinu trokuta, $P = 36$. ◄

No, za rješenje zadatka bilo je dovoljno odrediti samo točku $A$. Naime, težišnice trokuta dijele trokut na šest malih trokuta koji imaju jednake površine.




*Sl. 2.*

Pogledajmo sliku. Točka $T$ težište je trokuta. Očigledno vrijedi:

$$P_1 + 2P_2 = P_1 + 2P_3$$

i

$$P_2 + 2P_1 = P_2 + 2P_3.$$

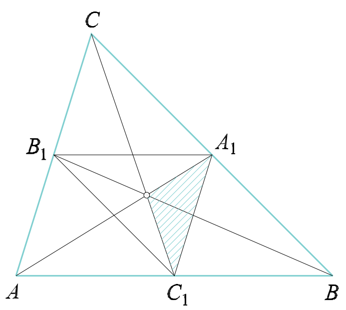
Iz prve jednakosti slijedi $P_2 = P_3$, a iz druge $P_1 = P_2$. No onda je i $P_1 = P_3$.

Kako je $P(\triangle AC_1T) = 6$, to je $P(\triangle ABC) = 6 \cdot P(\triangle AC_1T) = 36$.

No, sigurno je već ranije dokazano:

*Ako su $A_1, B_1$ i $C_1$ polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}$, odnosno $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ imaju isto težište.*

To je vrlo lijep i jednostavan zadatak. Osobito ga je jednostavno riješiti analitički. Evo kako:




*Sl. 3.*

Najprije odredimo

$$A_1\left(\frac{1}{2}(x_B + x_C), \frac{1}{2}(y_B + y_C)\right),$$
$$B_1\left(\frac{1}{2}(x_A + x_C), \frac{1}{2}(y_A + y_C)\right),$$
$$C_1\left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B)\right).$$

Zatim odredimo težište $T_1$ trokuta $\triangle A_1B_1C_1$ i lako se uvjerimo da je to ista točka kao i težište tokuta $\triangle ABC$.

Ali onda smo naš zadatak s početka mogli riješiti izravno. Izračunamo površinu trokuta $\triangle A_1C_1T$, i njegova je površina jednaka $\frac{1}{3}$ površine trokuta $\triangle A_1B_1C_1$, odnosno $\frac{1}{12}$ površine trokuta $\triangle ABC$.

*Zamijenite simbol odgovarajućom znamenkom!*