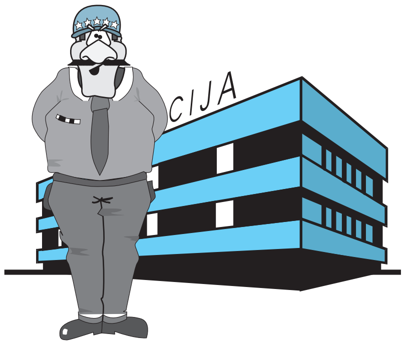


Generalizacija

Zdravko Kurnik

Generalizacija je jedna od osnovnih znanstvenih metoda istraživanja. Njezina suprotnost je **specijalizacija**. Riječ je nastala od novolatinske riječi *generalisatio* što znači *poopćavanje, uopćivanje, uopćenost* i prema riječi *generalis* što znači *općenit, opći, sveopći, sveobuhvatan, glavni, vrhovni*.

Ovu vrlo plodnu metodu u matematici možemo ukratko opisati ovako:

Generalizacija ili **poopćavanje** je prijelaz s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegova nadskupa. Polazi se od nekog pojma kojemu je pridružen određeni skup objekata, njegov opseg i ustanovljava neko svojstvo svih elemenata zadanog skupa. Zatim se promatra općenitiji pojam i svojstvo prenosi na sve elemente dobivenog nadskupa ili se izgrađuje općenitije svojstvo. Budući da odmah nije jasno hoće li pri tome prenošenju svojstvo ostati sačuvano, to se ono za sve elemente nadskupa nužno mora dokazati. Prema tome, generalizacija ili poopćavanje je metoda kojom se izgrađuju općenitiji pojmovi i općenitije tvrdnje.

Generalizacija je usko povezana s analogijom, analogija joj u pravilu prethodi, a osnova joj je induktivni način zaključivanja, tj. zaključivanje od pojedinačnog k općem. Ne treba pri tome zaboraviti ni ulogu analize.

Evo najčešćih prijelaza u školskoj matematici iz skupa u nadskup: $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $\mathbf{N} \to \mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\mathbf{R} \to$ *skup kvadratnih matrica, jednakostranični trokuti* $\to$ *jednakokračni trokuti, pravokutni trokuti* $\to$ *trokuti, kvadrati* $\to$ *pravokutnici, kvadrati* $\to$ *rombovi, pravokutnici* $\to$ *paralelogrami, paralelogrami* $\to$ *trapezi, trapezi* $\to$ *četverokuti, trokuti* $\to$ *mnogokuti, četverokuti* $\to$ *mnogokuti, pravilni mnogokuti* $\to$ *mnogokuti, kocke* $\to$ *kvadri, kvadri* $\to$ *paralelepipedi, tetraedri* $\to$ *n-terostrane piramide, trigonometrijske funkcije oštroga kuta* $\to$ *trigonometrijske funkcije bilo kojega kuta*.

Iz navedenog popisa lako se može zaključiti da se prijelaz obično vrši u "najbliži" nadskup. On istovremeno ukazuje na poopćenja određenih pojmova. Na primjer, pojam racionalnog broja poopćenje je pojma cijelog broja, pojam paralelograma poopćenje je pojma pravokutnika, pojam kvadra poopćenje je pojma kocke itd. Također se vidi da neki pojmovi mogu imati više poopćenja. Tako su pojam pravokutnika i pojam romba poopćenja pojma kvadrata, a pojam kompleksnog broja i pojam kvadratne matrice poopćenja realnog broja.

Popis otkriva još jednu važnu činjenicu. Naime, prijelazi *trokuti* $\to$ *mnogokuti* i *tetraedri* $\to$ *n-terostrane piramide* mogu se okarakterizirati kao zamjene broja 3 bilo kojim brojem n, a posljednji prijelaz u popisu je zapravo odbacivanje ograničenja $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ za promatrani kut α. Na temelju tih prijelaza izdvajaju se dva osnovna načina poopćavanja:

1) zamjena konstante varijablom;
2) odbacivanje ograničenja.

Već iz onog što je gore rečeno dade se zaključiti da generalizacija ima široku primjenu u nastavi matematike. U nižim razredima osnovne škole nastava matematike je induktivna: nastavnik pomoću konkretnih objekata uvodi nove pojmove, opisuje njihova svojstva, a onda na temelju njih izvodi jednostavnije generalizacije. Kasnije generalizacije postaju sve složenije. Na taj način ova metoda postaje važan i bogat izvor novih saznanja.

Generalizacija, odnosno prijelaz s konkretnog i pojedinačnog k općem, je složen misaoni proces. U psihologiji se posebno ukazuje na činjenicu da postoje učenici koji teško svladavaju taj prijelaz. Zato je pred nastavnikom odgovorna zadaća da svojim metodičkim pristupom i umješnošću učenicima učini taj prijelaz što lakšim. Navest ćemo neka od mjesta gdje se u nastavi primjenjuje metoda generalizacije.

Primjer 1. Izbor iz nastavnog gradiva.

1) Zakoni komutacije $a+b=b+a$, $ab=ba$, asocijacije $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$ i distribucije $(a+b)c=ac+bc$ u skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ uspostavljaju se na sljedeći način: na početku se razmatraju konkretni primjeri, a onda se izvode navedene **generalizacije**. Također se **metodom generalizacije** ti zakoni postupno iz skupa $\mathbf{N}$ prenose u šire skupove $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

2) Formula $\sum \alpha_k = (n-2)\pi$ za zbroj kutova n-terokuta **generalizacija** je formule $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ za zbroj kutova u trokutu.

3) Teorem o središnjem i obodnom kutu $\beta = 2\alpha$ **generalizacija** je Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom kružnice.

4) Formula $v=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$ za duljinu visine jednakokračnog trokuta **generalizacija** je formule $v=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ za duljinu visine jednakostraničnog trokuta, formula $d=\sqrt{a^2+b^2}$ za duljinu dijagonale pravokutnika **generalizacija** je formule $d=a\sqrt{2}$ za duljinu dijagonale kvadrata, a formula $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ za duljinu dijagonale kvadra **generalizacija** je formule $d=a\sqrt{3}$ za duljinu dijagonale kocke.

5) Potencija a^n s prirodnim eksponentom n definira se kao produkt n jednakih faktora $a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$, jednakošću $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ potencija se proširuje na cjelobrojne eksponente, a jednakošću $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ na racionalne eksponente. Svakim opisanim korakom pojam potencije se **generalizira**.

6) Operacije s potencijama imaju sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} a^n\cdot a^m &= a^{n+m},\\ a^n : a^m &= a^{n-m},\\ (ab)^n &= a^n\cdot b^n,\\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= a^n : b^n. \end{aligned}$$

Ova svojstva dokazuju se najprije za eksponente n i m iz skupa $\mathbf{N}$, a zatim se pokazuje da pri prijelazima $\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Z}\to\mathbf{Q}$ svojstva ostaju sačuvana.

7) Kosinusov poučak $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ u skupu trokuta **generalizacija** je Pitagorina poučka $c^2=a^2+b^2$ u skupu pravokutnih trokuta.

8) Vièteove formule $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$ za kvadratnu jednadžbu $ax^2+bx+c=0$ mogu se lako dobiti iz prikaza kvadratne jednadžbe u obliku $(x-x_1)(x-x_2)=0$ i uspoređivanjem koeficijenata. Vièteove formule za kubnu jednadžbu $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$ izvode se

analogijom. No slične formule mogu se lako izvesti i za algebarsku jednadžbu n-tog stupnja. Algebarska jednadžba n-tog stupnja $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ je **generalizacija** linearne, kvadratne i kubne jednadžbe. Pomoću svojih rješenja x_1, x_2, ..., x_n ona se može zapisati u obliku $(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0$. Uspoređivanjem koeficijenata u oba zapisa slijedi generalizacija Vièteovih formula:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}.$$

* * *

Važni dijelovi nastavnog gradiva su različita pravila za brojeve koja učenici trebaju pamtiti. Takva su očito pravila navedena u 6) prethodnog primjera. U [3] razmatran je niz takvih pravila i ukazano je na potrebu da se nakon dokaza pravila iz metodičkih razloga najprije analogijom prošire na više od dva broja, pa tek onda prijeđe na primjenu. Daljnji korak u produbljivanju gradiva je poopćavanje tih pravila. Poopćenja u udžbenicima najčešće nema. Međutim, nedostajanje poopćenja pruža nastavniku mogućnost da tu ispolji svoju kreativnost, vođenjem pomogne učenicima da otkriju, pa možda i dokažu, poopćenja i tako doprinese razvoju njihovoga stvaralačkog mišljenja.

Primjer 2. **Pravila:**

$(ab)^2 = a^2b^2$, $\quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$,
$a^m a^n = a^{m+n}$, $\quad (ab)^n = a^n b^n$,
$|ab| = |a|\cdot|b|$, $\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$,
$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$,
$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
i dr.

Pogledajmo drugo pravilo. Analogijom se ono proširuje na tri broja ovako:
$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab}\cdot\sqrt{c} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$.
Na temelju toga lako se formulira sljedeća **generalizacija**:

Neka je n prirodni broj veći od 1 i a_1, a_2, ..., a_n pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi jednakost

$$\sqrt{a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a_n}.$$

Pogledajmo sedmo pravilo. Analogijom se ono proširuje na tri broja ovako: $\log_a(xyz) = \log_a[(xy)z] = \log_a(xy) + \log_a z = \log_a x + \log_a y + \log_a z$. U ovom slučaju može se iskazati ova **generalizacija**:

Neka je n prirodni broj veći od 1 i x_1, x_2, ..., x_n pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi jednakost

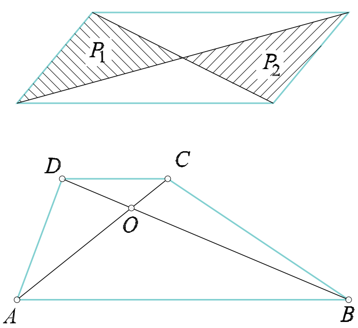
$$\log_a(x_1x_2\cdots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n.$$

Slično se izvode **generalizacije** i ostalih pravila. Sve tako dobivene generalizacije su istinite. Strogi dokazi provode se primjenom metode matematičke indukcije. Kada se u nastavnom gradivu naiđe na neko pravilo, treba se uvijek sjetiti analogije i generalizacije!

* * *

Slijede primjeri kojima je glavni cilj pokazati kako se otkrivaju generalizacije. Bilo bi dobro da nastavnik matematike priprema (bar za naprednije učenike) ovakve probleme i tako uz redovnu nastavu dodatnim zadacima usmjerava mišljenje učenika na ovaj važan znanstveni postupak.

Primjer 3. **Jedno svojstvo trapeza.**



Na crtežu su paralelogram i trapez. U paralelogramu površine P_1 i P_2 su jednake. Kako je paralelogram vrsta trapeza, prirodno se pomišlja da možda i svi trapezi imaju to svojstvo.

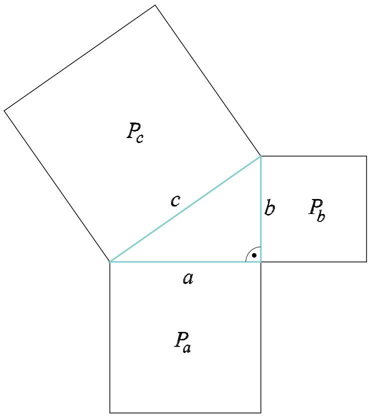
Generalizacija:

Neka je ABCD trapez i O sjecište njegovih dijagonala. Tada su površine trokuta AOD i BOC jednake.

Tvrdnja je istinita!

* * *

Primjer 4. Poopćenja Pitagorina poučka.



Pitagorin teorem $c^2 = a^2 + b^2$ razmatrat ćemo u njegovom drugom obliku:

Površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama, tj. $P_c = P_a + P_b$.

Kako poopćiti ovaj teorem? Imamo pravokutan trokut i nad njegovim stranicama kvadrate. Kvadrati, moraju li biti baš kvadrati? Ovim pitanjem rađa se ideja zamjene kvadrata nad stranicama pravokutnog trokuta nekim drugim likovima. Međutim, to ne mogu biti bilo kakvi likovi. Neka svojstva skupa kvadrata trebaju ostati sačuvana. Uočimo da su s jedne strane svi kvadrati slični četverokuti, a s druge strane su pravilni mnogokuti. Te činjenice ukazuje na tri pogodne zamjene *kvadrati $\longrightarrow$ slični četverokuti, kvadrati $\longrightarrow$ pravilni mnogokuti, kvadrati $\longrightarrow$ slični mnogokuti.*

Generalizacije:

1) *Ako su četverokuti nad stranicama pravokutnog trokuta međusobno slični, onda je površina četverokuta nad hipotenuzom jednaka zbroju površina četverokuta nad katetama.*
2) *Površina pravilnog mnogokuta nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina pravilnih mnogokuta nad katetama.*
3) *Ako su mnogokuti nad stranicama pravokutnog trokuta međusobno slični, onda je površina mnogokuta nad hipotenuzom jednaka zbroju površina mnogokuta nad katetama.*

Jednostavna svojstva skupa kvadrata i malo logičkog mišljenja omogućila su tri lijepe nove tvrdnje, i to istinite! Istinitost je posljedica poučka o sličnim mnogokutima. Naime, površine sličnih mnogokuta odnose se kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica. U sva tri naša slučaja duljine odgovarajućih stranica su a, b, c i vrijedi $\dfrac{P_c}{P_a} = \dfrac{c^2}{a^2}$, $\dfrac{P_c}{P_b} = \dfrac{c^2}{b^2}$, pa uvrštavanjem a^2 iz prve jednakosti i b^2 iz druge jednakosti u Pitagorinu relaciju $c^2 = a^2 + b^2$ odmah dobivamo traženu jednakost $P_c = P_a + P_b$.

* * *

Primjer 5. Djeljivost zbroja kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva.

Tri uzastopna prirodna broja označimo sa n, $n+1$, $n+2$ i promatrajmo izraz $f(n) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$. Analizirajmo taj izraz promatrajući neke konkretne trojke.

$(1,2,3)$ $\quad f(1)=1^3+2^3+3^3=36$,

$(2,3,4)$ $\quad f(2)=2^3+3^3+4^3=99$,

$(5,6,7)$ $\quad f(5)=5^3+6^3+7^3=684$,

$(11,12,13)$ $\quad f(11)=11^3+12^3+13^3=5256$ itd.

1) Uočimo da se brojevi na desnim stranama mogu pisati kao produkti $36 = 9 \cdot 4$, $99 = 9 \cdot 11$, $684 = 9 \cdot 76$, $5256 = 9 \cdot 584$.

Nakon ove jednostavne analize slijedi prva **generalizacija**:

Zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva uvijek je djeljiv sa 9.

2) Brojevi na desnim stranama mogu se pisati i kao produkti $36 = 6 \cdot 6$, $99 = 9 \cdot 11$, $684 = 18 \cdot 38$, $5256 = 36 \cdot 146$. Njihovi prvi faktori su oblika $6 = 1+2+3$, $9 = 2+3+4$, $18 = 5+6+7$, $36 = 11+12+13$, dakle zbrojevi polaznih uzastopnih prirodnih brojeva! Nakon ove složenije analize slijedi druga **generalizacija**:

Zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva uvijek je djeljiv sa zbrojem tih brojeva.

Nije teško opravdati obje tvrdnje.

Nakon kubiranja $f(n)$ se može pisati u obliku $f(n) = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3n(n^2+5) + 9(n^2+1)$. Za prvu tvrdnju treba još samo pokazati da je izraz $n(n^2+5)$ djeljiv sa 3. Nova tvrdnja! Svaki prirodni broj n može se zapisati na jedan od sljedeća tri načina $3k$, $3k-1$, $3k-2$. Ako je n prvog oblika, djeljiv sa 3 je prvi faktor, a ako je n drugog ili trećeg oblika, djeljiv sa 3 je drugi faktor.

Izraz $f(n)$ može se razložiti na faktore. Razlaganje se provodi ovako $f(n) = 3n^3+9n^2+15n+9 = 3n^3+3n^2+6n^2+6n+9n+9 = 3n^2(n+1)+6n(n+1)+9(n+1) = 3(n+1)(n^2+2n+3)$. Ovaj produkt djeljiv je sa $3(n+1)$, a to je upravo zbroj brojeva n, $n+1$, $n+2$.

* * *

Primjer 6. Izraz $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.

Što se može reći o zbroju umnoška četiri uzastopna prirodna broja i jedinice? Analizirajmo taj izraz:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2,$$
$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 1 = 3025 = 55^2,$$
$$10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 1 = 17161 = 131^2 \quad \text{itd.}$$

Generalizacija:

Zbroj umnoška četiri uzastopna prirodna broja i jedinice kvadrat je nekoga prirodnog broja.

Valjanost tvrdnje osniva se na identitetu $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2$. Ovaj identitet korisno je pamtiti.

* * *

Primjer 7. Broj dijelova $F_2(n)$ na koje n pravaca ravnine u općem položaju dijele ravninu.

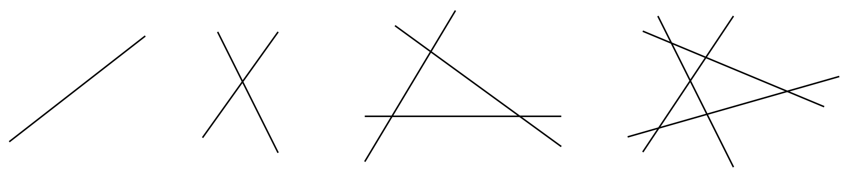
Pravci su u općem položaju ako među njima nema paralelnih pravaca i ako nikoja tri ne prolaze istom točkom

Promatranjem crteža nalazimo da je $F_2(1) = 2$, $F_2(2) = 4$, $F_2(3) = 7$, $F_2(4) = 11$. Brojevi 2, 4, 7, 11 sami još nam ništa ne kažu o nekoj pravilnosti. Međutim, ako ih razložimo na zbrojeve $1+1$, $1+2+1$, $1+2+3+1$, $1+2+3+4+1$, onda vidimo da se gornje jednakosti mogu pisati

$$F_2(1) = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1,$$
$$F_2(2) = \frac{2 \cdot 3}{2} + 1,$$
$$F_2(3) = \frac{3 \cdot 4}{2} + 1,$$
$$F_2(4) = \frac{4 \cdot 5}{2} + 1.$$

Generalizacija:

$$F_2(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2+n+2}{2}.$$



Valjanost ove formule temelji se na rekurzivnoj relaciji $F_2(n) = F_2(n-1) + n$ koju čitatelji mogu sami lako opravdati.

* * *

U sljedećem primjeru lako je uočljiva početna pravilnost, ali ona vodi na prebrz zaključak. Pogledajmo.

Primjer 8. Broj dijelova $F_3(n)$ na koje n ravnina prostora u općem položaju dijele taj prostor.

Ravnine su u općem položaju ako među njima nema paralelnih ravnina i ako nikoje četiri ne prolaze istom točkom.

Jedna ravnina dijeli prostor na dva dijela, dvije ravnine na četiri dijela, tri ravnine na osam dijelova, pa je

$$F_3(1) = 2 = 2^1,$$
$$F_3(2) = 4 = 2^2,$$
$$F_3(3) = 8 = 2^3.$$

Prirodno se nameće **generalizacija**: $F_3(n) = 2^n$.

No, ova jednakost nije točna. Naime, u narednom slučaju četvrta ravnina će razdijeliti samo 7 od 8 prethodnih dijelova na po dva dijela i time povećati ukupni broj dijelova za 7. To znači da je

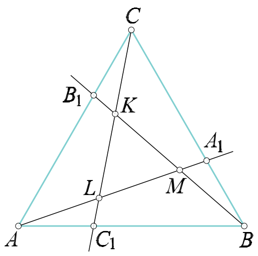
$$F_3(4) = 8 + 7 = 15$$

(a ne 16 kako bi slijedilo prema gornjoj formuli). Podrobnija analiza problema i primjena metode rekurzije pokazale bi da je ispravna formula

$$F_3(n) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

* * *

Primjer 9. Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC dane su točke A_1, B_1, C_1 takve da je $|BA_1| = |CB_1| = |AC_1| = \frac{1}{3}|AB|$. Pravci AA_1, BB_1, CC_1 određuju jednakostranični trokut KLM i za površine vrijedi jednakost $p(KLM) = \frac{1}{7}p(ABC)$.



Ovo je sam po sebi lijep i ne baš jednostavan dokazni zadatak. Međutim, nećemo se zadržavati na dokazivanju ove tvrdnje. Nastavit ćemo naša razmatranja u smjeru istraživanja općenitijih tvrdnji. Ovdje možemo s jedne strane konstantu $\frac{1}{3}$ zamijeniti varijablom $\frac{1}{n}$ (n prirodan broj veći ili jednak 3), a s druge strane jednakostranični trokut zamijeniti bilo kojim trokutom.

Generalizacije:

1) *Neka je ABC jednakostranični trokut i $|BA_1| = |CB_1| = |AC_1| = \frac{1}{n}|AB|$. Tada je KLM jednakostranični trokut i za površine vrijedi općenitija jednakost*

$$p(KLM) = \frac{n^2 - 4n + 4}{n^2 - n + 1}p(ABC).$$

2) *Neka je ABC trokut i $|BA_1| = \frac{1}{3}|BC|$, $|CB_1| = \frac{1}{3}|CA|$, $|AC_1| = \frac{1}{3}|AB|$. Tada za površine ostaje sačuvan odnos, tj. vrijedi*

$$p(KLM) = \frac{1}{7}p(ABC).$$

3) *Neka je ABC trokut i $|BA_1| = \frac{1}{n}|BC|$, $|CB_1| = \frac{1}{n}|CA|$, $|AC_1| = \frac{1}{n}|AB|$. Tada za površine vrijedi općenitija jednakost*

$$p(KLM) = \frac{n^2 - 4n + 4}{n^2 - n + 1}p(ABC).$$

* * *

Razmotrimo sada problem u kojem se prirodno isprepliću razne ideje generaliziranja i metode rješavanja.

Primjer 10. Određivanje konačnih suma (k ide od 1 do n)

a) $\sum k$, $\sum(2k-1)$,

b) $\sum k^2$, $\sum(2k)^2$, $\sum(2k-1)^2$, $\sum k(k+1)$, $\sum k(3k+1)$, $\sum k(2k-1)$,

c) $\sum k^3$, $\sum(2k)^3$, $\sum(2k-1)^3$, $\sum k(k+1)^2$, $\sum k^2(k+1)$, $\sum k(k+1)(k+2)$,

d) $\sum k^4$,

e) $\sum k^5$,

f) $\sum \frac{1}{k(k+1)}$,

$\sum \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$,

$\sum \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$,

g) $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$,

$\sum \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$,

h) $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.

U mnogim zbirkama zadaci iz ovog područja formuliraju se riječima "Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost...". Desna strana je zadana i traži se samo dokaz. Međutim, pokazat ćemo da se problem može razmatrati raznovrsnije. Dio suma mogu istraživati i učenici osnovne škole.

Sumu prvih n prirodnih brojeva $\sum k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ učenici obično dobro poznaju. Suma $\sum(2k-1)$, kao i druge slične sume iz grupe a) u kojima je opći pribrojnik prvog stupnja, može se odrediti razlaganjem na sumu suma. Tako je $\sum(2k-1) = 2\sum k - \sum 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$. Učenicima osnovne škole možda je ovakav rad sa sumama isuviše apstraktan. Bolje je da njima pružimo mogućnost naslućivanja rezultata preko konkretnih primjera. Ovako: $1 = 1$, $1+3 = 4 = 2^2$, $1+3+5 = 9 = 3^2$, $1+3+5+7 = 16 = 4^2$, $1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$ itd.

Generalizacija:

Suma $\sum(2k-1)$ prvih n neparnih prirodnih brojeva jednaka je kvadratu broja n.

Prijeđimo na grupu suma b). Kako odrediti sumu kvadrata prvih n prirodnih brojeva $\sum k^2$? Ovdje ćemo potražiti novu ideju. Primijetimo da su opći članovi suma u grupi a) prvog stupnja, a desne strane drugog stupnja. Opći članovi suma u grupi b) su drugog stupnja. Nije daleko pomisao da su desne strane tada trećeg stupnja. Ako je tako, sve se one mogu obuhvatiti **općim** zapisom $An^3 + Bn^2 + Cn + D$ s neodređenim koeficijentima A, B, C, D. Za određenje tih koeficijenata potrebna su četiri uvjeta. Njih dobivamo promatranjem konkretnih suma za $n = 1, 2, 3, 4$. Za sumu $\sum k^2$ dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} A+B+C+D &= 1,\\ 8A+4B+2C+D &= 5,\\ 27A+9B+3C+D &= 14,\\ 64A+16B+4C+D &= 30. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = 0$, pa je $\sum k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Poželjno je još da se dobivena jednakost provjeri za $n = 5$. Zatim se jednakost dokazuje metodom matematičke indukcije. Ostale sume u grupi b) mogu se također odrediti primjenom metode neodređenih koeficijenata. Brži način je i ovdje razlaganje na sumu suma i uporaba prethodnih rezultata. Na primjer, $\sum k(3k+1) = 3\sum k^2 + \sum k = 3\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)^2$.

Razmatranja u grupama suma c), d) i e) provode se analogno. Pogledajmo sada grupu f). Prva suma je jednostavna i omogućuje naslućivanje rezultata. Zaista

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2} &= \frac{1}{2},\\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} &= \frac{2}{3},\\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} &= \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

itd.

Generalizacija:

$$\sum \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Jednakost se može dokazati primjenom metode matematičke indukcije, ali i primjenom rastava na parcijalne razlomke $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Uočimo da je desna strana promatrane sume kvocijent "polinoma" prvog stupnja. Takve će biti desne strane i ostalih suma u ovoj grupi. Sve se one mogu obuhvatiti **općim** zapisom $\frac{An+B}{Cn+D}$.

Sva daljnja razmatranja temelje se, kao i ranije, na četiri metode: metodi neodređenih koeficijenata, metodi matematičke indukcije, metodi parcijalnih razlomaka i metodi generalizacije. Čitateljima preporučujemo da dovrše ovo malo istraživanje o konačnim sumama. Više detalja o konačnim sumama može se naći u lijepoj knjižici [4].

* * *

Na kraju istaknimo još jedanput: poopćavanjem se dolazi do izreka koje nisu samim time i dokazane. One ne moraju biti niti istinite kao što pokazuje već generalizacija u primjeru 8. Takve izreke ipak imaju veze s realnošću jer su istinite za velik broj posebnih slučajeva. Samo dokazivanje često je vrlo teško provesti. U svrhu opovrgavanja neke takve tvrdnje obično se pronalazi bar jedan protuprimjer.

Primjer 11. Protuprimjeri.

1) Eulerova funkcija $f(x) = x^2+x+41$. Promatrajmo vrijednosti funkcije f za nenegativne cijele brojeve. Imamo redom $f(0) = 41$, $f(1) = 43$, $f(2) = 47$, $f(3) = 53$, $f(4) = 61$, $f(5) = 71$, $f(6) = 83$. Sve te vrijednosti su prosti brojevi.

Generalizacija:

Vrijednost funkcije $f(x)$ prost je broj za svaki nenegativni cijeli broj.

Prosti su još brojevi $f(7)$, $f(8)$, ..., $f(39)$.

Protuprimjer: Vrijednost funkcije $f(41)$ očito nije prost broj, jer je $f(41) = 41^2+41+41 = 41 \cdot 43$. Međutim, ni $f(40)$ nije prost broj. Ovo je školski primjer opovrgavanja.

2) Fermatovi brojevi $F(n) = 2^{2^n}+1$. Imamo redom $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65\,537$. Sve su ovo prosti brojevi.

Generalizacija:

Svi Fermatovi brojevi su prosti brojevi.

Protuprimjer: Euler je pokazao da Fermatov broj $F(5) = 4\,294\,967\,297$ nije prost broj, jer se može napisati u obliku produkta $641 \cdot 6\,700\,417$.

Fermatovi brojevi važni su u teoriji geometrijskih konstrukcija.

* * *

Osnovni cilj članka i opisanih primjera u njemu bio je ukazati na znanstvenu metodu **generalizaciju** (posredno i **specijalizaciju** kao obratan postupak) i mogućnosti primjene te metode u nastavi matematike. Težište razmatranja bilo je na idejama koje mogu pomoći nastavniku pri razvijanju i usmjeravanju mišljenja učenika prema generalizaciji. Zato su svjesno ispušteni dokazi nekih tvrdnji ili potpuno rješavanje nekih problema. Dokazi i rješavanje provode se drugom metodom, **sintezom**, ali to je već druga matematička priča.

Literatura

[1] V. Gorski, *Generalizacija i specijalizacija u nastavi matematike*, Diplomski rad, Zagreb 2000.

[2] Z. Kurnik, *Analiza*, Matematika i škola 2 (1999), 54. – 64.

[3] Z. Kurnik, *Analogija*, Matematika i škola 3 (2000), 101. – 109.

[4] A. Marić, *Konačni zbrojevi*, Element, Zagreb 1998.

[5] G. Polya, *Matematika i pravdopodobnye rassuždenija* (prijevod s engl.), Moskva 1957.