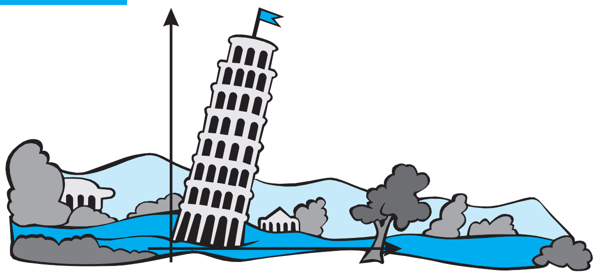
Nagib pravca



Branimir Dakić, Zagreb

Linearna funkcija i primjene njezinih svojstava prožimaju gotovo cjelokupno gradivo matematike osnovne i srednje škole. Posljedica je to jednostavne i prirodne proporcionalnosti koju ona opisuje i koju zatječemo u raznim područjima.

Tako je, primjerice duljina kružnog luka kružnice polumjera r linearno proporcionalna veličini pripadnog središnjeg kuta,

$$l = l(\alpha) = \frac{r \cdot \pi}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

Postotni iznos P neke osnovice G linearno je proporcionalan postotku p, te je

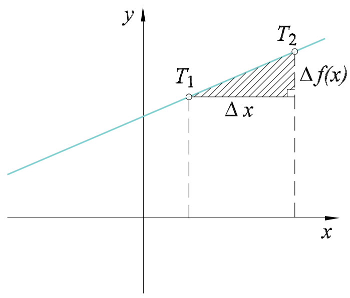
$$P = P(p) = \frac{G}{100} \cdot p.$$

Imamo dakako i drugih primjera i ne samo u matematici već i u fizici, kemiji itd, ali prije svega onih stvarnih i praktičnih kojima bi valjalo potkrijepiti uvodnu obradu linearne funkcije.

Temeljna karakteristika linearne funkcije $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$ opisana je uvjetom

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = a, \quad a \neq 0.$$

Njime je zapravo zapisano da je prosječni prirast linearne funkcije (**nagib**) stalan.



Sl. 1.

Intuitivno usvajanje ove važne činjenice trebao bi biti osnovni cilj obrade linearne funkcije u osnovnoj školi. Taj se cilj, nažalost, uglavnom ne ostvaruje, jer se olako i prebrzo sa same funkcije, a osobito njezina grafičkog prikaza na koji bi se valjalo oslanjati pri tumačenju svojstva funkcije, prelazi na **analitiku pravca**. Govori se o eksplicitnom, implicitnom pa i segmentnom obliku jednadžbe pravca, određuje se jednadžba pravca iz dvije njegove točke, bavi se (sasvim formalno i bez jasna smisla) uvjetima paralelnosti i okomitosti pravaca itd.

Zagovornike ovakve obrade treba upitati koji je njezin smisao, koja joj je svrha? Mogu li učenici VII. razreda uopće usvojiti to gradivo s razumijevanjem? Nije li naprosto riječ o svladavanju nekih formalnih postupaka u baratanju s formulama? Kako protumačiti činjenicu da učenici ne povezuju znanja o linearnoj funkciji stečena u nastavi matematike s gotovo istodobnom pojavom te funkcije u nastavi fizike?

O pravcu ovdje valja govoriti isključivo kao o grafu linearne funkcije te se njime služiti pri zornoj interpretaciji svojstava te funkcije i pri rješavanju problema koji su uz tu funkciju vezani. Treba naučiti spretno i točno crtati graf linearne funkcije, usvojiti geometrijsko značenje njezinih koeficijenata. Tek kasnije, pri obradi sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice razmatrat ćemo i grafičko rješavanje takva sustava, ali bez razvijanja neke posebne teorije, jer će se uvjet paralenosti pravaca, nakon prethodno dobro svladana pojma nagiba, ovdje ugraditi spontano i dati odgovor na pitanja o rješivosti sustava.

Nakon što smo naveli i obradili niz primjera grafički ih interpretirajući u koordinatnom sustavu, možemo pristupiti apstraktnijoj obradi linearne funkcije. Tu je svakako prvi cilj usvajanje već spomenutog pojma **nagiba** ili koeficijenta smjera (potonji termin čini mi se manje prihvatljivim) pravca, grafa linearne funkcije.

Napomenimo, kako je vrlo poželjno razvijati naviku crtanja grafa funkcije putem određivanja njegovih točaka, i to ne samo pri crtanju grafa linearne, već bilo koje realne funkcije.

Navedimo sada nekoliko zadataka kakvima bi bilo dobro pratiti obradu linearne funkcije:

Zadatak 1. Dana je linearna funkcija $f(x) = 2x - 3$.

a) Nacrtaj graf ove funkcije.

b) Odredi nultočku funkcije f i naznači je na slici.

c) Za koje realne brojeve x vrijedi $f(x) > 0$? Prikaži rješenje na slici.

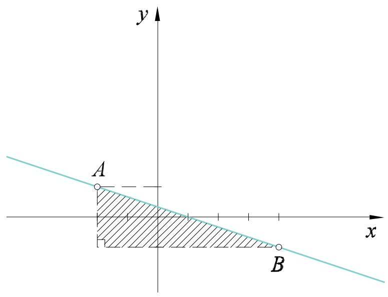
d) Kolika je promjena vrijednosti funkcije f kada x poraste od -1 na 4? Opiši tu promjenu koristeći se grafom funkcije.

Bilo bi vrijedno riješiti više ovakvih zadataka. No kao što smo naglasili, za linearnu je funkciju osobito važan pojam nagiba i činjenica da je njezin nagib stalan. Razumijevanju će doprinijeti prethodno dobro obrađeni primjeri. Ovdje ćemo rješavati nešto apstraktnije zadatke, kao što je primjerice sljedeći:

Zadatak 2. Koliki je nagib grafa linearne funkcije $f(x) = ax + b$, ako je $f(-2) = 1$, te $f(4) = -1$?

▶ Zadatak rješavamo koristeći se grafičkim predodžbama. Ucrtat ćemo u koordinatni sustav točke $A(-2, 1)$ i $B(4, -1)$ te uočiti:

Dok je x **porastao** od -2 na 4 (dakle za 6, odnosno $\Delta x = 6$), vrijednost funkcije **pala** je od 1 na -1 ($\Delta f(x) = -2$).



Sl. 2.

Prosječna promjena (nagib) funkcije jednaka je

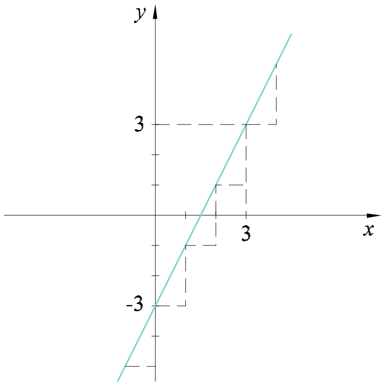
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = -\frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Zadatak 3. Ako je f linearna funkcija, te $f(0) = -3$, $f(3) = 3$, koliko je $f(100)$?

▶ Najprije odredimo nagib:

$$a = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3 - (-3)}{3} = 2,$$

Možemo to provesti i grafički, dapače.



Sl. 3.

To znači da je prosječna promjena, promjena po jedinici jednaka 2. Drugim riječima, kada x poraste za 1, vrijednost funkcije poraste za 2.

Lako je zaključiti stoga

$$f(100) = f(0) + 100 \cdot 2 = 197. ◀$$

Zadatak 4. Točke $A(-2,4)$ i $B(x,6)$ pripadaju grafu linearne funkcije. Ako je njezin nagib jednak $\frac{2}{9}$, odredi apscisu x točke B.

Zadatak 5. Točkom $A(-4,3)$ prolazi pravac s nagibom $a = 3$. Odredi nepoznate koordinate točaka $B(1,y)$ i $C(x,12)$.

I na kraju ovog dijela navodimo i jedan složeniji zadatak.

Zadatak 6. Odredi funkciju f, ako za svaki realni broj x vrijedi

$$f(x+1) + f(x+2) = 4x.$$

▶ Danoj jednadžbi pridružit ćemo jednadžbu koju dobijemo kad u prvoj zamijenimo x sa $x-1$. Tako imamo sustav

$$f(x+1) + f(x+2) = 4x,$$
$$f(x) + f(x+1) = 4x - 4.$$

Oduzmemo li ove dvije jednadžbe, dobit ćemo jednadžbu

$$f(x+2) - f(x) = 4.$$

Iz nje zaključujemo: pri svakom porastu varijable za 2, vrijednost funkcije poraste za 4.

Radi se dakle o linearnoj funkciji s nagibom $a = 2$, o funkciji $f(x) = 2x + b$. Uvrštavanjem iz polazne jednadžbe se dobije:

$$2(x+1) + b + 2(x+2) + b = 4x,$$

odakle slijedi $b = -3$, te je $f(x) = 2x - 3$ tražena funkcija. ◀

Ovako postavljena obrada linearne funkcije važna je zbog toga što se uistinu bavi samom funkcijom, ali i zbog toga što će utjecati i na kasnije obrade drugih realnih funkcija.

Završit ćemo rješavanjem još nekoliko zanimljivih zadataka, kojima nije mjesto u redovnoj nastavi već u radu s nadarenijim učenicima.

Zadatak 7. Koliko se točaka kojima su obje koordinate cijeli brojevi (**cjelobrojnih točaka**) nalazi na dužini $\overline{AB}$, $A(-50,-20)$, $B(40,100)$?

▶ Nagib pravca AB jednak je $\frac{4}{3}$. To znači da se od jedne cjelobrojne točke do prve sljedeće dolazi pomakom udesno za 3 i prema gore za 4. Tako dobivamo redom ove točke:

$$T_1(-47,-16), \quad T_2(-44,-12),$$
$$T_3(-41,-8), \ \ldots, \ T_n(37,96).$$

Jednostavnim prebrajanjem nalazimo $n = 29$. Na dužini $\overline{AB}$ imamo 29 točaka čije su obje koordinate cijeli brojevi. ◀

Zadatak 8. Koliko **cjelobrojnih točaka** leži na pravcu $2x - 3y = 1$ nad intervalom $\langle -20, 50 \rangle$?

▶ Jednadžbu pravca zapišimo u obliku $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, odakle očitamo nagib $a = \frac{2}{3}$. Odredit ćemo sada prvu lijevu cjelobrojnu točku pravca nad danim intervalom, to je ona s apscisom $x = -19$. Svaka sljedeća imat će apscisu veću za 3 od prethodne, posljednjoj je apscisa $x = 47$.

Ukupno 23 točke zadovoljavaju uvjete zadatka. ◄

Vratimo se prethodnom zadatku i postavimo ga općenitije:

Zadatak 9. Riješi jednadžbu $2x - 3y = 1$ u skupu cijelih brojeva.

► Na zadatke slične ovome nerijetko ćemo naići na matematičkim natjecanjima učenika osnovnih i srednjih škola. Riječ je o **linearnoj diofantskoj jednadžbi** za čije rješavanje postoji jednostavan algebarski algoritam.

No zadatak ćemo riješiti oslanjajući se na svojstva linearne funkcije.

Jednadžba $2x - 3y = 1$ jest jednadžba pravca čiji je nagib $\frac{2}{3}$. Dovoljno je odrediti jednu cjelobrojnu točku pravca (ako postoji), takva je $T(2, 1)$. Uzastopnim pomicanjem bilo ulijevo, bilo udesno za po 3, dobivat ćemo apscise svih cjelobrojnih točaka toga pravca. Pri svakom takvom pomaku ordinate tih točaka će se smanjivati, odnosno povećavati za 2. Sve će te točke biti potpuno opisane svojim koordinatama

$$x = 2 + 3k, \quad y = 1 + 2k, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Skup svih uređenih parova

$$(2 + 3k, 1 + 2k), \qquad k \in \mathbf{Z},$$

ujedno je skup svih rješenja linearne diofantske jednadžbe $2x - 3y = 1$.

Na kraju napomenimo:

Pitanje, ima li na pravcu $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbf{Z}$ uopće cjelobrojnih točaka, pitanje je koje zadire u područje djeljivosti cijelih brojeva. Uvjet za egzistenciju rješenja diofantske jednadžbe $ax + by = c$ je $D(a, b) = 1$.

I još na kraju: Imam kao nastavnik jedno vrlo zanimljivo iskustvo s rješavanjem zadataka u koji je neizravno ugrađen nagib linearne funkcije. ◄

Zadatak 10. Dužna $\overline{AB}$, $A(-2, -1)$, $B(8, 4)$, podijeljena je točkama P_1, P_2, P_3 i P_4 na pet sukladnih dijelova. Odredi koordinate djelišnih točaka.

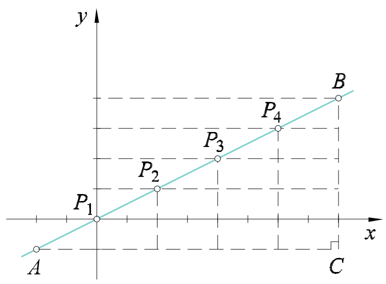
► Riječ je o zadatku iz III. razreda srednje škole pa se očekuje određivanje djelišta iz poznatih formula:

$$x_P = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$
$$y_P = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

pri čemu se uvrštavanjem za λ redom brojeva $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$ i 4 dobivaju točke $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(4, 2)$ i $P_4(6, 3)$.

No evo kako su neki učenici riješili zadatak:

Ucrtali su točke A i B te nacrtali pravokutni trokut $\triangle ACB$. Očito je $|AC| = 10$, $|BC| = 5$ i pomičući se udesno za po 2, prema gore za po 1, dobivat će se koordinate djelišnih točaka.



Sl. 4.

Jednostavno, zar ne?

Ne govori li i ovo rješenje o dobrom osjećaju učenika za **linearnost** i prirodnijem rješenju zadatka?

Otpada prigovor da smo pogriješili kad smo za A i B odabrali točke s cjelobrojnim koordinatama.

Naime, ovim se postupkom, kao što se lako vidi, može riješiti svaki ovakav zadatak. Jedino što rješenje valja upotpuniti obrazloženjem. ◄