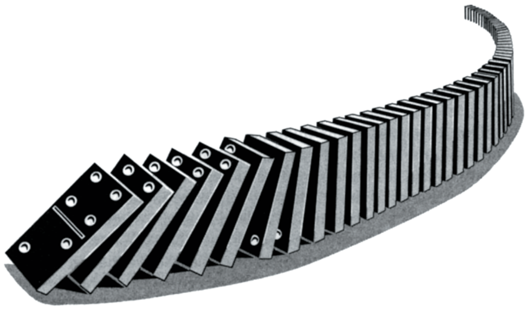
Indukcija



Zdravko Kurnik, Zagreb

Među načinima zaključivanja i metodama znanstvene spoznaje posebno mjesto zauzimaju **indukcija** i njezina suprotnost **dedukcija**. To naročito vrijedi za matematiku. Razlog je jednostavan: matematika je deduktivna znanost, a matematika u nastajanju je eksperimentalna induktivna znanost. Same metode razlikuju se po ciljevima. Cilj indukcije je opće, a cilj dedukcije je pojedinačno i posebno.

Induktivno zaključivanje rezultat je viševjekovne ljudske djelatnosti i svoju pojavu duguje promatranju i eksperimentu. Prvi izvori o indukciji su radovi starogrčkog filozofa *Sokrata* (469. – 399.), a preciznije logičko zasnivanje dao je drugi starogrčki filozof *Aristotel* (384. – 322.), osnivač logike.

Riječ *indukcija* potječe od latinske riječi *inductio* što znači *uvođenje, navođenje, pobuđivanje*.

Pojam *indukcija* ima sljedeća tri osnovna značenja:

A) Indukcija je jedan od načina zaključivanja kojim se iz dvaju ili više pojedinačnih ili posebnih sudova dobiva novi opći sud. Kraće rečeno, indukcija je rasuđivanje od pojedinačnog k općem. To je misaoni proces kojim se stvaraju generalizacije.

Ovaj oblik indukcije dobro ilustrira sljedeći primjer.

Primjer 1. Pravac i presjeci stošca.

Pojedinačni sudovi:

Pravac siječe kružnicu u najviše dvije točke.
Pravac siječe elipsu u najviše dvije točke.
Pravac siječe parabolu u najviše dvije točke.
Pravac siječe hiperbolu u najviše dvije točke.

Poseban sud:

Kružnica, elipsa, parabola i hiperbola su svi oblici presjeka stošca.

Na temelju pojedinačnih sudova i posebnog suda, uzimajući još u obzir da navedene krivulje čine skup krivulja drugog reda, dade se izvesti ovaj istinit opći sud:

Pravac siječe krivulje drugog reda u najviše dvije točke.

B) Indukcija je jedna od osnovnih znanstvenih metoda istraživanja kojom se pri proučavanju nekog skupa objekata promatraju posebni objekti iz toga skupa i utvrđuju kod njih ona svojstva koja se zatim pripisuju čitavom skupu. Očito da je za primjenu ove metode potrebno dobro poznavanje induktivnog načina zaključivanja. Induktivni postupak sastoji se od niza induktivnih zaključaka kojima se dolazi do shvaćanja općeg. Metoda indukcije zasniva se na analitičko-sintetičkoj metodi, a tijesno je povezana s konkretizacijom, specijalizacijom, analogijom i generalizacijom. Počinje se s konkretnim objektima i specijalnim slučajevima, induktivni zaključci nižu se analogijom, a promatrane činjenice nastoje se generalizirati. Iz toga proizlazi da je metoda indukcije zapravo jedan oblik generalizacije. Bez obzira na njezinu vjerojatnosnu prirodu, indukcija je jedan od najznačajniji postupaka u znanosti.

Pokažimo na jednom primjeru kako se primjenjuje indukcija kao metoda i učenike uvodi u istraživački rad i otkrivanje "novih" matematičkih istina.

Primjer 2. Zbroj kubova prvih *n* prirodnih brojeva.

Pri proučavanju brojeva često se nalaze neobični odnosi. Takvi su i sljedeći prikazi kvadrata nekih prirodnih brojeva: $3^2 = 1+3+5, 3^2 = 1^3+2^3, 5^2 = 1+3+5+7+9$, $5^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$, $6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$, $19^2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$. Uočavamo sličnost prve i treće jednakosti, četvrte i šeste, te druge i pete. Prve dvije sličnosti opisane su u [4] i izvedene odgovarajuće generalizacije. Analizirajmo treću sličnost.

Jednakosti $3^2 = 1^3+2^3, 6^2 = 1^3+2^3+3^3$ dovoljne su da pobude mišljenje i usmjere ga na razmatranje veze između zbroja kubova i kvadrata prirodnih brojeva. Postoji li tu neka pravilnost? Pogledajmo, uz zamjenu strana, više specijalnih slučajeva:

$$1^3 = 1^2,$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2.$$

Prva generalizacija lako se iskazuje:

Zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva kvadrat je prirodnog broja.

Lijeve strane gornjih jednakosti se pravilno grade. Što je s desnim stranama? Osim što su desne strane kvadrati, možemo li o njima nešto više reći? Pogledajmo pažljivije baze potencija na lijevoj i desnoj strani. Veza među tim bazama je vrlo uočljiva: $1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1+2+3+4 = 10$, $1+2+3+4+5 = 15$, $1+2+3+4+5+6 = 21$. Otkrili smo pravilnost gradnje i desnih strana. Sada možemo izvesti dosta uvjerljiv zaključak.

Druga generalizacija:

Za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2.$$

Jednakost se dokazuje primjenom metode matematičke indukcije. Zvuči paradoksalno, ali to je jedan deduktivni postupak i nećemo ga ovdje provoditi.

C) Indukcija je način izlaganja u literarnom izvoru, u razgovoru, u *nastavnom procesu* kada se od manje općih tvrdnji dolazi do općih tvrdnji.

Shematski prikaz induktivnog zaključivanja:

Neka je $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ skup svih mogućih posebnih slučajeva takvih da za svaki od njih neko svojstvo s može biti istinito ili neistinito. Pretpostavimo da je u k slučajeva svojstvo s istinito, tj. da vrijedi $s(a_1)$, $s(a_2)$, $\ldots$, $s(a_k)$. Tada se induktivno zaključivanje provodi po shemi

$$s(a_1),\ s(a_2), \ldots, s(a_k) \implies (\forall x)\, s(x). \tag{$*$}$$

Potpuna indukcija

Ako je S konačan skup koji sadrži k posebnih slučajeva a_1, a_2, $\ldots$, a_k i za sve njih je ispitana valjanost svojstva s, onda je zaključak izveden na taj način ispravan. Oblik zaključivanja koji se zasniva na razmatranju svih pojedinačnih i posebnih sudova ili slučajeva naziva se **potpuna indukcija**.

Primjer 3. **Broj prostih brojeva među prvih 20 prirodnih brojeva.**

Skup S koji treba razmotriti ima 20 elemenata, pa se lako mogu ispitati svi slučajevi i ustanoviti koji su od promatranih brojeva prosti.

Imamo redom $1 = 1$, $\underline{2} = 1\cdot 2$, $\underline{3} = 1\cdot 3$, $4 = 1\cdot 4 = 2\cdot 2$, $\underline{5} = 1\cdot 5$, $6 = 1\cdot 6 = 2\cdot 3$, $\underline{7} = 1\cdot 7$, $8 = 1\cdot 8 = 2\cdot 2\cdot 2$, $9 = 1\cdot 9 = 3\cdot 3$, $10 = 1\cdot 10 = 2\cdot 5$, $\underline{11} = 1\cdot 11$, $12 = 1\cdot 12 = 2\cdot 2\cdot 3$, $\underline{13} = 1\cdot 13$, $14 = 1\cdot 14 = 2\cdot 7$, $15 = 1\cdot 15 = 3\cdot 5$, $16 = 1\cdot 16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, $\underline{17} = 1\cdot 17$, $18 = 1\cdot 18 = 2\cdot 3\cdot 3$, $\underline{19} = 1\cdot 19$, $20 = 1\cdot 20 = 2\cdot 2\cdot 5$.

Zaključak: *Među prvih 20 prirodnih brojeva ima 8 prostih brojeva.*

* * *

U prethodnom primjeru potpunom indukcijom lako smo došli do zaključka. Međutim, potpuna indukcija kao metoda strogog dokazivanja rijetko se primjenjuje jer se često radi o velikom broju pojedinačnih ili posebnih slučajeva. Ako je broj slučajeva beskonačan, primjena potpune indukcije je gotovo nemoguća. Ponekad je ipak moguće skup od beskonačno mnogo slučajeva rastaviti na konačno mnogo podskupova istovrsnih slučajeva. Zatim se provode razmatranja i izvode zaključivanja u svakom od tih podskupova. Pogledajmo dva primjera.

Primjer 4. **Kvadrati prirodnih brojeva.**

Može li kvadrat prirodnog broja završavati sa 8?

Kako ima beskonačno mnogo prirodnih brojeva, jasno je da ne možemo ispitati sve pojedinačne slučajeve. Ipak, odgovor na pitanje nije teško naći. Najprije razvrstamo sve prirodne brojeve u podskupove prema posljednjim znamenkama brojeva. Na taj način dobivamo deset podskupova. Dalje ispitujemo posljednje znamenke kvadrata brojeva: ako broj završava sa 0 i njegov kvadrat završava sa 0; ako broj završava sa 1 i njegov kvadrat završava sa 1; ako broj završava sa 2, njegov kvadrat završava sa 4 itd. Sve zaključke pregledno pokazuje tablica:

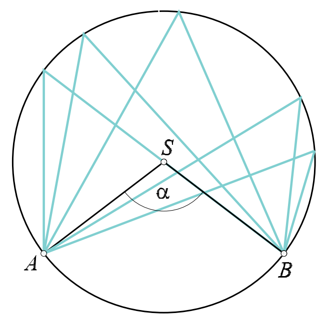
završetak broja	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
završetak kvadrata	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Vidimo da kvadrat prirodnog broja ne može završavati sa 8. Međutim, tablica otkriva više, općenitiju izreku:

Kvadrat prirodnog broja ne može završavati sa 2, 3, 7 i 8.

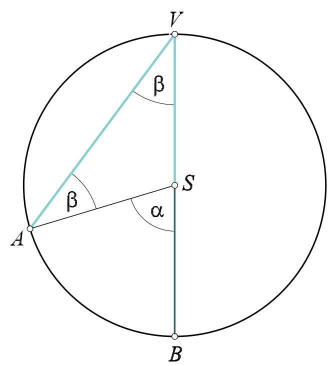
* * *

Primjer 5. **Poučak o obodnom i središnjem kutu.**

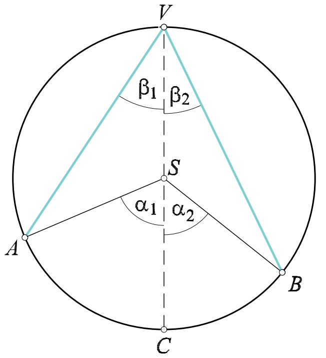


Svakom središnjem kutu može se pridružiti beskonačno mnogo obodnih kutova. Da bismo ispitali odnos obodnih kutova i pripadnog središnjeg kuta, sve te obodne kutove razvrstamo u skupove obzirom na položaj središta kružnice prema kutovima. Na taj način dobivamo tri posebna slučaja:

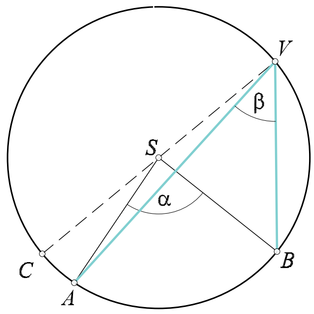
1) Središte kružnice pripada jednom kraku obodnog kuta.



2) Središte kružnice leži unutar obodnog kuta.



3) Središte kružnice leži izvan obodnog kuta.



U prvom slučaju središnji kut α vanjski je kut jednakokračnog trokuta AVS sa suprotnim kutovima β, pa je prema poučku o vanjskom kutu trokuta $\alpha = 2\beta$, odnosno $\beta = \frac{1}{2}\alpha$.

U drugom slučaju vrhom V obodnog kuta povučemo dijametar kružnice $\overline{VC}$ koji kutove α i β dijeli na kutove α_1 i α_2, odnosno β_1 i β_2 za koje prema prvom slučaju vrijedi $\alpha_1 = 2\beta_1$, $\alpha_2 = 2\beta_2$, pa je $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$, odnosno $\beta = \frac{1}{2}\alpha$.

U trećem slučaju vrhom V obodnog kuta opet povučemo dijametar $\overline{VC}$. Sada uočavamo da je $\alpha = \sphericalangle CSB - \sphericalangle CSA = 2\sphericalangle CVB - 2\sphericalangle CVA = 2(\sphericalangle CVB - \sphericalangle CVA) = 2\beta$, odnosno $\beta = \frac{1}{2}\alpha$.

Tako smo na temelju induktivnog niza posebnih slučajeva dokazali sljedeću opću izreku:

Svaki obodni kut β kružnice jednak je polovini pripadnog središnjeg kuta α.

Detaljna razrada ove nastavne jedinice može se naći u [1].

* * *

Nepotpuna indukcija

Ako skup S ima više elemenata od k posebnih slučajeva $a_1, a_2, \ldots, a_k$ za koje je ispitana valjanost svojstva s, onda zaključak izveden prema shemi $(*)$ nije pouzdano istinit već samo vjerojatno istinit. Oblik zaključivanja koji se zasniva na razmatranju jednog ili više, ali ne svih, pojedinačnih i posebnih sudova ili slučajeva naziva se **nepotpuna indukcija**.

Zaključak izveden nepotpunom indukcijom može, dakle, biti neistinit. Zato se nepotpuna indukcija kao metoda istraživanja primjenjuje vrlo oprezno. Međutim, njezino značenje je u tome da se razmatranjem posebnih slučajeva navodi na pomisao o postojanju neke zakonitosti i ona pomaže da se postavi hipoteza o prirodi te zakonitosti. Jasno je da to počinje promatranjem i eksperimentom. Takva indukcija primjenjuje se u eksperimentalnim znanostima, ali je ona i u matematici bogat izvor novih spoznaja. Razlika je jedino u tome što se u matematici dobivene tvrdnje još i strogo dokazuju.

I u nastavi matematike treba biti oprezan pri primjeni takvog oblika zaključivanja ili takve metode istraživanja, ali ni jedno ni drugo ne treba izbjegavati. Uostalom, poznato je da je nastava matematike u osnovnoj školi pretežno induktivna. Prednosti primjene: ostvarenje načela od lakšeg ka težem, od jednostavnog ka složenom, proučavanje novih apstraktnih pojmova i izreka preko promatranja i provjeravanja, navođenje učenika na nove pojmove, iskazivanje novih tvrdnji i dr. Nove tvrdnje bit će uvjerljivije ukoliko se u indukciji razmatra veći broj posebnih slučajeva

Razmotrit ćemo nekoliko primjera indukcije kao načina izlaganja u nastavnom procesu.

Primjer 6. Djeljivost prirodnih brojeva sa 9.

U ovom odjeljku iz poglavlja o djeljivosti prirodnih brojeva primjenom indukcije navode se učenici na iskazivanje dviju općih tvrdnji.

1) Promatrajmo višekratnike broja 9 manje od 200 i zbrojeve njihovih znamenaka. Višekratnici su brojevi 9, 18, 27, 36,45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135,144, 153, 162, 171, 180, 189, 198, a zbrojevi njihovih znamenaka su 9 ili 18. Uočavamo da su zbrojevi znamenaka višekratnici broja 9!

Prva tvrdnja:

Ako je prirodni broj djeljiv sa 9, onda je i zbroj njegovih znamenaka djeljiv sa 9.

2) Promatrajmo prirodne brojeve 2007, 18999, 456 237, 987654321 čiji su zbrojevi znamenaka 9, 36, 27, 45 višekratnici broja 9. Provjera dijeljenjem pokazuje da su i promatrani brojevi djeljivi sa 9.

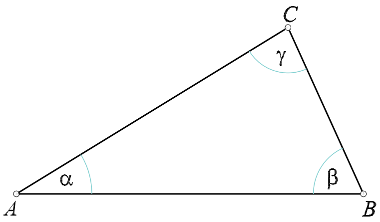
Druga tvrdnja:

Ako je zbroj znamenaka prirodnog broja djeljiv sa 9, onda je i taj prirodni broj djeljiv sa 9.

Ova tvrdnja omogućuje brže ispitivanje djeljivosti prirodnih brojeva sa 9, nego što se to može postići dijeljenjem. To je osobito važno kod velikih brojeva. No, primjena opće tvrdnje na pojedinačan slučaj je već dedukcija!

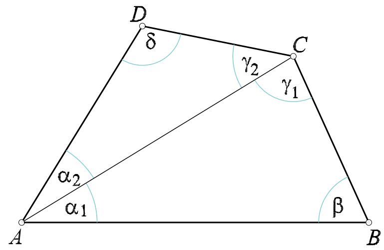
Primjer 7. Zbroj K_n svih unutarnjih kutova mnogokuta.

Obrada ove nastavne jedinice u sedmom razredu osnovne škole temelji se na nizu induktivnih zaključivanja. Kreće se od ranije spoznatih činjenica.



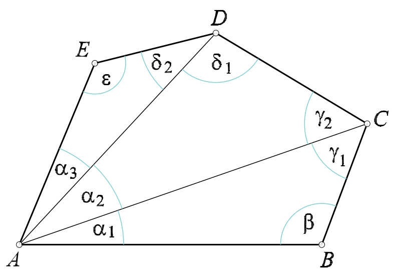
Prva od tih činjenica je izreka o zbroju svih unutarnjih kutova trokuta. Za taj zbroj K_3 vrijedi jednakost

$$K_3 = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$



Druga činjenica je izreka da je zbroj svih unutarnjih kutova četverokuta jednak 360°. Podsjetimo se na izvod formule za K_4. Neka je $ABCD$ četverokut kojemu su α, β, γ i δ unutarnji kutovi. Povucimo dijagonalu $\overline{AC}$. Ta dijagonala dijeli kutove α i γ na dijelove α_1 i α_2, odnosno γ_1 i γ_2, a četverokut $ABCD$ na dva trokuta ABC i ACD. Zbrojevi unutarnjih kutova u tim trokutima jednaki su $\alpha_1 + \gamma_1 + \delta = 180^\circ$, $\alpha_2 + \beta + \gamma_2 = 180^\circ$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo $(\alpha_1+\alpha_2)+\beta+(\gamma_1+\gamma_2)+\delta = 180^\circ+180^\circ$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^\circ$, pa je

$$K_4 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ = 2 \cdot 180^\circ.$$



Sada nije teško nastaviti induktivni postupak. Naredni mnogokut je peterokut $ABCDE$ s unutarnjim kutovima α, β, γ, δ

i ε. Njegove dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ iz vrha A dijele kut α na tri dijela α_1, α_2 i α_3, kut γ na dva dijela γ_1 i γ_2, kut δ na dva dijela δ_1 i δ_2, a peterokut $ABCDE$ na tri trokuta ABC, ACD i ADE. Zbrojevi unutarnjih kutova u tim trokutima jednaki su redom $\alpha_1+\beta+\gamma_1=180°$, $\alpha_2+\gamma_2+\delta_1=180°$, $\alpha_3+\delta_2+\varepsilon=180°$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\beta+(\gamma_1+\gamma_2)+(\delta_1+\delta_2)+\varepsilon=180°+180°+180°$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=540°$, pa je

$$K_5=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=540°=3\cdot 180°.$$

Na analogan način bismo zaključili da je šesterokut s tri dijagonale iz jednog vrha podijeljen na četiri trokuta, pa je $K_6=4\cdot 180°$, za sedmerokut je $K_7=5\cdot 180°$ itd. Razmatrani niz induktivnih zaključivanja vodi nas na sljedeću opću izreku, generalizaciju:

Zbroj K_n svih unutarnjih kutova mnogokuta sa n stranica dan je formulom

$$K_n=(n-2)\cdot 180°.$$

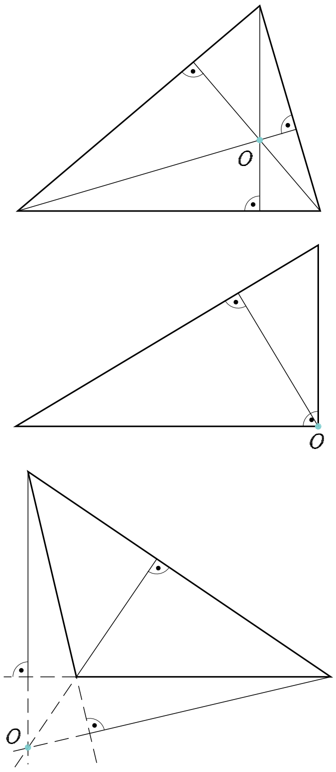
Dokaz ove izreke zasniva se na činjenici da se iz jednog vrha n-terokuta mogu povući $n-3$ dijagonale koje taj lik dijele na $n-2$ trokuta. U ovom primjeru razmatrano je više posebnih slučajeva i u svakom od njih opisano je potpunije induktivno zaključivanje. Time se postiže bolje razumijevanje nastavnikova izlaganja, a na kraju izvedena opća izreka postaje uvjerljiva i bez dokaza.

* * *

Manjkava obrada nekog nastavnog sadržaja ima za posljedicu i manjkavo znanje učenika. U induktivnoj nastavi potreban je primjeren broj pojedinačnih i posebnih slučajeva. U protivnom, izvedene tvrdnje mogu biti neuvjerljive, a ponekad i netočne. Primjer takve izreke je *"visine trokuta sijeku se u jednoj točki"*. Analizirajmo to podrobnije.

Primjer 8. Ortocentar trokuta.

Da bismo ispitali odnos visina u trokutu, moramo razmotriti tri posebna slučaja: oštrokutni trokut, pravokutni trokut, tupokutni trokut.



Promatrajući navedene vrste trokuta i njihove visine dolazimo do sljedećih induktivnih zaključaka:

Ako je trokut oštrokutan, visine trokuta sijeku se u jednoj točki koja je unutar trokuta.

Ako je trokut pravokutan, visine trokuta sijeku se u jednoj točki i ta je točka vrh pravog kuta.

Ako je trokut tupokutan, visine trokuta se ne sijeku, ali se u jednoj točki sijeku pravci koji sadrže visine i ta je točka izvan trokuta.

Na temelju ovih posebnih izreka izvodi se sljedeća opća izreka:

Pravci koji sadrže visine trokuta sijeku se u jednoj točki O.

Ova je izreka, kao što znamo, istinita. Točka O naziva se *ortocentar trokuta*.

* * *

Mnogo je sadržaja u školskoj matematici za čiju je obradu potreban i za razvoj učenikova mišljenja važan induktivni postupak. Među takve sadržaje posebno se ubrajaju razna pravila, zakoni, formule i teoremi, pogotovo ako se oni strogo ne izvode ili ne dokazuju.

Literatura

[1] J. ĐUROVIĆ, *O pripremi nastavnog sata matematike*, Matematika i škola 1 (1999), 18–26.

[2] Z. KURNIK, *Analiza*, Matematika i škola 2 (1999), 54–64.

[3] Z. KURNIK, *Analogija*, Matematika i škola 3 (2000), 101–109.

[4] Z. KURNIK, *Generalizacija*, Matematika i škola 4 (2000), 147–154.

[5] G. POLYA, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prijevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb 1956.

[6] G. POLYA, *Matematika i pravdopodobnye rassuždenija* (prijevod s engleskog), Moskva 1957.

REKLI SU O INDUKCIJI

Glavna sredstva pomoću kojih se otkrivaju istine u matematici su indukcija i analogija.
(Laplace)

U teoriji brojeva često se događa da se zbog nekog neočekivanog sretnog slučaja pomoću indukcije pojave najelegantnije nove istine.
(Gauss)