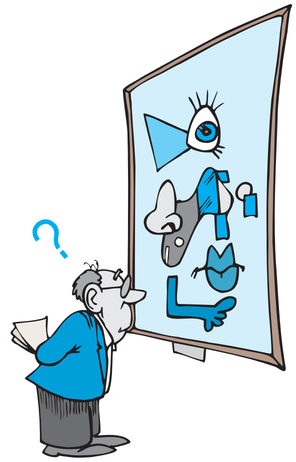
Apstrakcija



Zdravko Kurnik, Zagreb

Matematika je apstraktna znanost. Objekti, veličine i odnosi među njima, koji se pojavljuju i promatraju u matematici, uzeti su iz stvarnog svijeta, ali su im razna obilježja apstrahirana. Na temelju te činjenice lako zaključujemo da znanstvene metode **apstrakcija** i njezina suprotnost **konkretizacija** igraju posebno važnu ulogu u matematičkim istraživanjima, a samim time i u nastavi matematike.

Riječ *apstrakcija* potječe od latinske riječi *abstractio* što znači *izdvajanje, izvlačenje, odvajanje, odvlačenje*.

* * *

Razvojni put matematike do apstraktne znanosti bio je dug. Podsjetimo se ukratko na početak. Matematika drevnih civilizacija Azije i Afrike, posebno Babilona i Egipta, bila je konkretna, tijesno povezana s praktičkim izračunavanjima i mjerenjima. Međutim, već su stari Babilonci i Egipćani imali neku predodžbu o uopćavanju i zaključivanju, a kod njih se nazire i početak dokazivanja. Stari Grci, zahvaljujući putovanjima svojih znanstvenika i filozofa u te zemlje, upoznali su i preuzeli njihova matematička znanja, ali su ih počeli objašnjavati na nov način. U mnoštvu do tada nepovezanih činjenica Grci su počeli tražiti sličnosti, apstrahirati ih i generalizirati, a onda odatle izvoditi, deducirati nove činjenice. U matematici važno mjesto počinju zauzimati apstraktna razmatranja i dokazivanje. Začetnik toga postupka je otac grčke matematike *Tales* (oko 624. – 548. p.K.). Iako u njegovom dokazivanju vlada pomutnja između konkretnog i apstraktnog, pa njegov dokaz još nije logički strog, Talesov postupak je ipak značajan pomak prema apstrakciji. Potpuna apstrakcija matematičkih pojmova postiže se nakon Talesa. Tako *Pitagora* (oko 570. – 497. p.K.) već razmatra apstraktne geometrijske objekte, a kod njega su i brojevi apstraktni.. Uvodi dokaz u matematiku. Njegov filozofsko–znanstveni sustav, i pored svih nedostataka, doprinio je da se kod Grka matematika razvije kao apstraktna znanost. Pomoću apstraktnih matematičkih pojmova on i njegovi sljedbenici objašnjavali su strukturu svemira.

Teoretski problem apstrakcije razmatra filozof Sokrat (469. – 399. p.K.) u svojoj raspravi sa sofistima u vezi s pitanjem o garanciji spoznaje. *Platon* (oko 429. – 348. p.K.) u shvaćanju apstraktnih matematičkih pojmova odlazi još korak dalje. On u njima vidi realnost i postojanje svih ideja iskustvenih objekata. Matematika, koja radi s apstraktnim matematičkim pojmovima, omogućuje sagledavanje svijeta izvan iskustva. Iz toga proizlazi njegova filozofija i njegovo poimanje svijeta - Platonov "svijet ideja". Platonovo učenje o idejama odbacio je matematičar *Euklid* (oko 330. – 275. p.K.). Svi pojmovi koje on razmatra su iz osjetilnog iskustva. Sklon je strogim dokazima. Njegovi "Elementi" sadrže visok stupanj apstrakcije. U prvim stoljećima prije i poslije Krista nalazimo začetke svih osnovnih znanstvenih metoda istraživanja, *analogije*, *analize* i *sinteze, generalizacije* i *specijalizacije, indukcije* i *dedukcije, apstrakcije* i *konkretizacije*.

U kasnijim razdobljima matematika se brže razvijala. Pojava svakog novog područja matematike pokretala bi ponovo rasprave oko karaktera tradicionalne i apstraktne matematike. Danas je taj odnos jasno naznačen. Izvanredan pregled glavnih ideja i metoda u matematici tijekom njezina razvoja može se naći u knjizi [1].

* * *

Što je zapravo *apstrakcija*? Postoje različiti opisi ovog pojma već prema tome u kojoj se znanosti ili području ljudske djelatnosti on susreće (logika, psihologija, filozofija, kemija, matematika, umjetnost, razgovorni jezik i dr.). Apstrakcija je jedan od temeljnih misaonih procesa. U znanosti, a posebno u matematici, apstrakcija označuje djelotvoran i logički razrađen postupak za teoretsko upoznavanje predmeta i praktičko ovladavanje njime.

Preciznije:

> **Apstrakcija** *je misaono odvlačenje općeg bitnog svojstva promatranog objekta ili pojave od ostalih svojstava, nebitnih za određeno proučavanje, i odbacivanje tih nebitnih svojstava.*

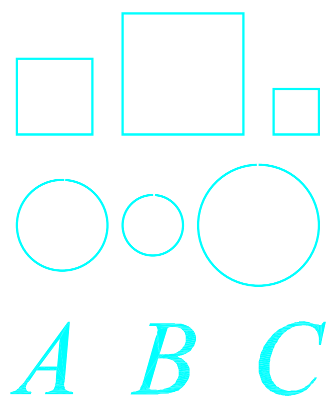
Budući da se opća bitna svojstva nekog skupa objekata izdvajaju primjenom metode generalizacije, iz toga očito proizlazi da je **apstrahiranje** u uskoj vezi s **poopćavanjem** i da se ne može bez njega ostvariti.

Poopćavanje i apstrahiranje stalno se primjenjuju u procesu formiranja pojmova pri prijelazu od predodžbi k pojmovima. Pri tome, konkretni objekti, potrebni za formiranje novog pojma, moraju biti odabrani tako da omogućuju poopćavanje, izdvajanje bitnih svojstava koja tvore sadržaj pojma. Izdvajanje i apstrahiranje općih i bitnih svojstava služe za matematički opis promatranih konkretnih objekata. Pogledajmo vrlo jednostavan, ali i važan primjer pojma broja, gdje se učenik prvi puta susreće s apstrakcijom.

Primjer 1. Pojam broja 3.

Do pojma broja 3 učenik dolazi u nekoliko koraka.

1) Zapažanje (osjetilna spoznaja): upoznavanje konkretnih skupova i njihovih svojstava.



2) Predodžba o broju 3: uočavanje i izdvajanje zajedničkog bitnog svojstva promatranih skupova.

3) Formiranje apstraktnog pojma broja 3: bitno svojstvo skupa $\{a, b, c\}$.

Sličan je proces formiranja i mnogih drugih apstraktnih matematičkih pojmova.

* * *

Evo na početku još nekoliko jednostavnih apstrakcija.

Primjer 2. Iz svakodnevnog života.

1) S prirodom **apstrakcije**, a to znači s jednim za matematiku važnim misaonim procesom, učenike možemo upoznati vrlo rano. Uzmimo jednostavnu jednakost $20 \cdot 5 = 100$. Tu jednakost možemo shvatiti kao rezultat **apstrahiranja** iz mnogih konkretnih odnosa. Koji konkretan sadržaj možemo dati navedenoj jednakosti? Neki su od odgovora na ovo pitanje koje očekujemo od učenika: vrijednost 25 primjeraka dnevnih novina po cijeni od 5 kuna, površina prostorije duljine 25 metara i širine 5 metara, prijeđeni put vozilom za 5 sati brzinom od 20 km/sat i dr.

2) U školskim zadatcima o brzinama objekt koji se giba po nekom putu najčešće je čovjek, životinja, bicikl, automobil, vlak, brod ili avion. Pri rješavanju takvog zadatka mi se najprije udaljavamo od konkretne prirode objekta i zamišljamo objekt kao materijalnu točku koja se giba po pravcu. Nakon ove **apstrakcije** zadatak rješavamo kao matematički zadatak.

3) Problem postavljanja cjevovoda između dvaju mjesta povezan je s nizom pitanja. Sam cjevovod je konkretan objekt koji ima raznovrsna i za praktičke svrhe važna svojstva: oblik, veličinu, duljinu, težinu, propusnu snagu, kakvoću materijala, kakvoću izolacije i dr. Pri rješavanju ovog problema projektant mora nekoliko puta **apstrahirati**, izdvajajući neka od navedenih svojstava i zanemarujući privremeno ostala.

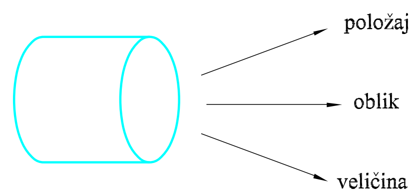
Razmatranje duljine cjevovoda i trase vodi do prvog apstraktnog modela cjevovoda — *geometrijske linije*, razmatranje oblika i veličine cjevovoda u svrhu što učinkovitijeg rada vodi do drugog apstraktnog modela cjevovoda — *geometrijskog tijela*, a razmatranje kakvoće izolacije cjevovoda vodi do trećeg apstraktnog modela cjevovoda — *geometrijske plohe*. Proučavanje ovih **apstraktnih** modela konkretnog objekta daje potrebne odgovore na ranije postavljena pitanja.

* * *

Već iz prva dva opisana primjera uočavamo da se apstrakcija pojavljuje u dva različita oblika. Prvi od njih karakteriziran je osjetilnom spoznajom.

Primjer 3. Predmet u prostoru.

Promatrajmo donji predmet kao geometrijsko tijelo. Ono ima različita svojstva koja uočavamo našim osjetilima: položaj u prostoru, oblik, veličinu, omeđenost i dr. U svrhu proučavanja možemo izdvojiti bilo koje od tih svojstava i udaljiti ga od ostalih. Strelice na crtežu pokazuju tri moguća smjera **apstrahiranja**.



* * *

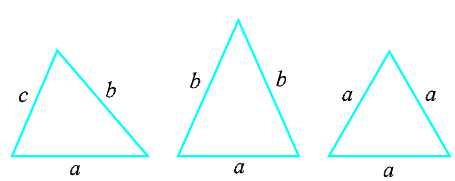
Drugi oblik apstrakcije karakteriziran je njezinim udaljavanjem potpuno izvan osjetilnog područja. Ona je po svojoj prirodi dublja od prve, jer nije samo jednostavan izbor nekih svojstava objekta za određeno proučavanje već i njihova transformacija.

Primjer 4. Klasifikacije trokuta.

Postoje dvije prirodne klasifikacije trokuta: klasifikacija u ovisnosti o duljinama stranica i klasifikacija u ovisnosti o veličinama kutova.

Ako vršimo klasifikaciju trokuta u ovisnosti o duljinama stranica, onda se pri tome udaljavamo od svojstava među veličinama kutova i drugih svojstava. To je prva **apstrakcija**.

Rezultat klasifikacija su sljedeći pojmovi: *raznostranični trokut, jednakokračni trokut, jednakostranični trokut*.



Ako vršimo klasifikaciju trokuta u ovisnosti o veličinama kutova, onda se pri tome udaljavamo od svojstava među duljinama stranica i drugih svojstava. To je druga **apstrakcija**.

* * *

Pogledajmo sada jedan složeniji primjer iz školske matematike u kojem se prožima i nadopunjuje nekoliko znanstvenih metoda (analiza, konkretizacija, indukcija, generalizacija, analogija), a posebno obratimo pozornost na različite razine **apstrahiranja**.

Primjer 5. Zakon komutacije za zbrajanje prirodnih brojeva.

a) Ovaj zakon učenici upoznavaju i usvajaju već u početnoj nastavi. Kao temelj istraživanja služi induktivni postupak koji se sastoji od niza induktivnih zaključaka o konkretnim objektima i specijalnim slučajevima. Konkretni objekti su najčešće skupovi predmeta iz stvarnog svijeta: olovke, štapići, pločice, novčići, kockice i dr. Na primjer, zbroj 3 novčića i 6 novčića jednak je 9 novčića, a toliko novčića dobiva se zbrajanjem 6 novčića i 3 novčića. Dakle, vrijedi jednakost $3+6=6+3$. Mijenjanjem broja elemenata iz navedenih skupova, zbrajanjem i provjeravanjem dobiva se za tu razinu nastave niz apstraktnih jednakosti:

$$3+6=6+3, \quad 9+4=4+9,$$
$$7+12=12+7, \; 10+15=15+10.$$

Jednakosti pokazuju da je nebitna priroda predmeta, a bitan odnos među brojevima predmeta kojeg one opisuju. Izdvajanjem toga općeg, bitnog izvedena je prva **apstrakcija**.

b) Dobivene jednakosti možemo u daljnjim razmatranjima uzeti kao polazne matematičke objekte i njih također podvrgnuti poopćavanju i apstrahiranju. Pogledajmo pažljivo te jednakosti. Nije teško otkriti u njima ono opće i odvojiti ga od njihovog konkretnog sadržaja. Što je to opće? Na lijevoj strani svake jednakosti je zbroj dvaju prirodnih brojeva, a na desnoj strani zbroj tih brojeva u obrnutom poretku. Ako odbacimo te konkretne prirodne brojeve i umjesto njih uvedemo promjenjive veličine, recimo a i b, dobivamo jednakost

$$a+b=b+a \quad \text{za sve} \quad a, b \in \mathbf{N}.$$

Prijelazom od konkretnih prirodnih brojeva k promjenjivim veličinama izvedena je generalizacija gornjih konkretnih jednakosti, a misaonim odvlačenjem općeg od posebnog ujedno je izvedena druga **apstrakcija**.

Na taj način primjenom poopćavanja i apstrahiranja vodimo učenike do otkrića *zakona komutacije za zbrajanje prirodnih brojeva*, ali i do pojma *promjenjive veličine*, važne kasnije za pojam *funkcije*.

* * *

Iako je zakon komutacije za zbrajanje prirodnih brojeva već dobiven poopćavanjem i apstrahiranjem, taj se postupak može nastaviti. Naime, u tom zakonu se još uvijek radi o konkretnom skupu — skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, i konkretnoj operaciji — zbrajanju prirodnih brojeva $+$. Postoje i drugi skupovi i operacije u njima koje imaju isto svojstvo.

Primjer 6. Zakon komutacije.

Zbrajanje cijelih brojeva $+$, množenje racionalnih brojeva $\cdot$, zbrajanje vektora $+$, unija skupova $\cup$, presjek skupova $\cap$, konjunkcija sudova $\wedge$, disjunkcija sudova $\vee$ su neke od operacija za koje vrijedi zakon komutacije:

$a+b=b+a$	za sve cijele brojeve a, b,
$a\cdot b=b\cdot a$	za sve racionalne brojeve a, b,
$\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v}_2+\vec{v}_1$	za sve vektore ravnine $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,
$A\cup B=B\cup A$	za sve skupove A, B,
$A\cap B=B\cap A$	za sve skupove A, B,
$A\wedge B=B\wedge A$	za sve sudove A, B,
$A\vee B=B\vee A$	za sve sudove A, B.

Sve su to konkretne operacije u konkretnim skupovima. Prijelazom od konkretnih skupova k promjenjivom skupu G i konkretnih operacija k promjenjivoj operaciji $\circ$, koja u skupu G ima opće bitno svojstvo tih operacija, izvodi se novo poopćavanje i nova **apstrakcija** i otkriva opći pojam *komutativne operacije*:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{za sve} \quad a, b \in G.$$

* * *

Matematika ima široku primjenu u mnogim područjima života i mnogim znanostima. Ako se primjena odnosi na konkretan problem ili pojavu, izgrađuje se njegov apstraktni matematički model. Fizika je znanost u kojoj je primjena matematike najčešća, a jedna od veza matematike i fizike u nastavi je pojam funkcije. Opišimo jedan takav primjer.

Primjer 7. Linearna funkcija.

Brzina tijela u ovisnosti o vremenu, linearno rastezanje metalnog štapa pri zagrijavanju, volumno rastezanje čvrstih tijela pri zagrijavanju, promjena stanja plina, veza Celsiusovih i Fahrenheitovih stupnjeva dani su redom relacijama

$$v_t = v_0 + at,$$
$$l_r = l_0 + bT,$$
$$V_T = V_0 + cT,$$
$$pV = nRT \quad (V \text{ konstantno ili } p \text{ konstantno}),$$
$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32.$$

Nije teško uočiti ono opće u ovim relacijama i odvojiti ga od njihovoga konkretnog sadržaja. Apstrahiranjem od konkretnih pojava i pojmova dolazimo tako do funkcije $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Prema tome, *linearna funkcija* je apstraktan matematički objekt koji obuhvaća sve navedene konkretne pojave. Proučavanjem funkcije $f(x) = ax+b$, $a \neq 0$, njezinih svojstava i grafa izdvaja se ono opće što je svojstveno ne samo pojavama,opisanim gornjim relacijama, nego i mnogim drugim pojavama u drugim znanostima. Dobiveni rezultati proučavanja mogu se nakon toga lako prenijeti u neku konkretnu situaciju.

Samo radi nešto potpunijeg uvida u primjenu matematike u fizici navodimo još neke fizičke pojave i određene funkcije kao njihove apstraktne matematičke modele:

Jednoliko-promjenjivo gibanje, slobodni pad — *kvadratna funkcija*,

Boyle-Mariotteov zakon — *funkcija obrnute proporcionalnosti*,

mehaničko titranje, izmjenična struja — *trigonometrijske funkcije*,

zakon radioaktivnog raspada — *eksponencijalna funkcija*.

* * *

Na kraju nekoliko napomena:

Opisani način konstrukcije apstraktnih modela konkretnih objekata u procesu spoznaje ujedno je dobar metodički način uvođenja učenika u krug ideja koji predstavlja predmet proučavanja matematike.

Pri primjeni apstrakcije u drugim područjima ljudske djelatnosti treba paziti koliko daleko smiju ići pojednostavnjenje i apstrahiranje, koji se detalji mogu zanemariti i na koje manje važne učinke ne treba obraćati pozornost. S jedne strane, apstraktni matematički model na koji se svodi konkretni problem ne smije biti suviše složen, a s druge strane ne smije se pretjerano pojednostavniti njegova konkretna strana. Nije uvijek lako naći granicu do koje se smije ići.

Uza sve dobre strane apstrakcija ima i jednu lošu stranu: udaljavanje od nekih svojstava objekta, nevažnih za određeno proučavanje. Time se može izgubiti cjelovita slika objekta.

Literatura

[1] Ž. Dadić, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb 1992.

[2] Z. Kurnik, *Analiza*, Matematika i škola 2 (1999), 54– 64.

[3] Z. Kurnik, *Analogija*, Matematika i škola 3 (2000), 101–109.

[4] Z. Kurnik, *Generalizacija*, Matematika i škola 4 (2000), 147–154.

[5] Z. Kurnik, *Indukcija*, Matematika i škola 5 (2000), 197–203.

[6] V. A. Oganesjan i dr., *Metodika prepodavanija matematiki/*, Prosveščenie, Moskva 1980.

[7] A. A. Stoljar, *Pedagogika matematiki*, Vyšejšaja škola, Minsk 1969.