# Poučak ili teorem

**Zdravko Kurnik, Zagreb**

Trajno usvajanje matematičkih znanja nije moguće bez usmjerenog razvoja mišljenja. Zato je razvoj mišljenja učenika jedan od osnovnih zadataka suvremene nastave matematike. Posebno stvaralačkog mišljenja kao najvišeg oblika. Što je mišljenje? **Mišljenje** se u psihologiji definira kao izdvajanje u spoznaji čovjeka određenih strana i svojstava promatranog objekta i njihovo dovođenje u odgovarajuće veze s drugim objektima u cilju stjecanja novih znanja. Jedan od osnovnih oblika mišljenja su *pojmovi*. **Pojam** je oblik mišljenja u kojem se odražavaju bitna i karakteristična svojstva objekata koji se proučavaju. U mišljenju pojmovi ne dolaze odvojeno, nego se na određeni način međusobno povezuju. Oblici takvih veza među pojmovima jesu *sudovi*, drugi osnovni oblik mišljenja. **Sud** (**izjava**, **izreka**, **iskaz**) je suvisla deklarativna rečenica koja se u pogledu istinitosti podvrgava načelu kontradikcije i načelu isključenog trećeg, tj. ona je ili istinita, ili neistinita.

Najvažnije vrste matematičkih sudova su *aksiomi*, *postulati* i *teoremi*.

**A)** Pri proučavanju elementarne matematike brzo dolazimo do spoznaje da se svi zaključci dobivaju rasuđivanjem iz nekoliko osnovnih postavki. Te osnovne postavke su aksiomi.

**Aksiom** je polazna tvrdnja koja se smatra istinitom i koja se ne dokazuje. Često se kaže da su aksiomi "očigledne istine". Primjeri aksioma:

"*Cjelina je veća od dijela*".

"*Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake*".

"*Točkom izvan danog pravca može se povući jedinstven pravac paralelan s tim pravcem*".

"*Za svaka dva pozitivna realna broja $a$ i $b$ postoji takav prirodan broj $n$ da je $na > b$*" (Arhimedov aksiom).

**Postulat** je polazna tvrdnja koja se također uzima bez dokaza. Postulat obično izražava neki uvjet koji treba zadovoljavati neki pojam ili neki odnos među pojmovima.

**Primjer 1.** Pojam površine.

Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poligona u ravnini, uključujući i prazan skup. *Površina* na skupu $\mathcal{P}$ je preslikavanje $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ koje ima sljedeća svojstva:

P1) $p(P) \geq 0$ za svaki poligon $P$.

P2) Ako je poligon $P$ zbroj poligona $P_1$ i $P_2$, onda je
$$p(P_1 + P_2) = p(P_1) + p(P_2).$$

P3) Ako su poligoni $P_1$ i $P_2$ sukladni, onda su brojevi $p(P_1)$ i $p(P_2)$ jednaki, tj.
$$P_1 \cong P_2 \implies p(P_1) = p(P_2).$$

P4) Postoji bar jedan kvadrat $K$ kojemu je duljina stranice jednaka 1 takav da je $p(K) = 1$.

Broj $p(P)$ naziva se *površina poligona P*.

U ovoj definiciji pojma površine na skupu poligona izjave P1), P2), P3) i P4) su postulati površine. Nije pogrešno ako se kaže i da su to aksiomi površine. Naime, u matematici se postulati najčešće ne razlikuju od aksioma.

**B)** Aksiomi i osnovni pojmovi čine temelj neke matematičke teorije. Ali ne samo oni. Naime, izgradnja neke matematičke teorije ima sljedeće četiri etape:

1) Navođenje osnovnih pojmova;
2) Formuliranje aksioma;
3) Definiranje novih pojmova;
4) Izvođenje i dokazivanje teorema.

Vidimo da su za izgradnju važne i izjave koje se logičkim rasuđivanjem izvode iz aksioma i definicija — teoremi. Teoremi proširuju i produbljuju naše znanje o nekom području matematike i njegovim objektima. Teorem je glavni predmet naših razmatranja. U školskoj matematici za ovaj pojam rabimo naziv *poučak*.

**Teorem** ili **poučak** (grč. $\vartheta\varepsilon\acute{o}\rho\eta\mu\alpha$ — *nešto viđeno, prizor, predstava, poučak*) je matematička izjava čija se istinitost utvrđuje dokazom. Važno je odmah istaknuti da se pod teoremom uvijek podrazumijeva istinita izjava.

U teoremu treba biti jasno istaknuto, s jedne strane, uz koje se uvjete u njemu razmatra određeni objekt, a s druge strane, što se o tome objektu tvrdi. Prema tome, u formulaciji teorema razlikuju se dva dijela: *pretpostavka (uvjet, hipoteza)* P i *tvrdnja (zaključak, posljedica, teza)* Q. Pretpostavka P je jedna ili više izjava koje se smatraju istinitim, a tvrdnja Q je izjava koju treba dokazati. Učenici često imaju poteškoća pri razlikovanju pretpostavke i tvrdnje, već i zato što nije uvijek jednostavno odvojiti objekt od uvjeta, pa ih znaju brkati. Tome može doprinijeti i ponekad nespretna formulacija poučka. Kako je obrada poučaka važan dio nastave matematike, potrebno je da nastavnik uloži dodatni napor za svladavanje tih poteškoća i pravilno usmjeravanje mišljenja učenika.

Za ilustraciju razmotrimo nekoliko poučaka i istaknimo u njima pretpostavku i tvrdnju.

**Primjer 2.** Poučci iz školskog gradiva.

1) *Umnožak dvaju uzastopnih parnih brojeva a i b djeljiv je sa* 8.
P: *a* i *b su uzastopni parni brojevi*.
Q: *Umnožak ab djeljiv je sa* 8.

2) *Dijagonale romba su okomite*.
P: *Četverokut je romb*.
Q: *Dijagonale romba su okomite*.

3) *U svakom trokutu nasuprot dviju stranica jednakih duljina leže jednaki kutovi*.
P: *U trokutu dvije su stranice jednakih duljina*.
Q: *Kutovi nasuprot tih stranica su jednaki*.

4) Talesov poučak. *Svaki obodni kut nad promjerom kružnice pravi je kut*.
P: *Dani kut je obodni kut nad promjerom kružnice*.
Q: *Dani kut je pravi kut*.

5) Pitagorin poučak. *Zbroj kvadrata duljina kateta a i b svakog pravokutnog trokuta jednak je kvadratu duljine hipotenuze c*.
P: *a i b su duljine kateta pravokutnog trokuta, a c je duljina hipotenuze*.
Q: *Vrijedi jednakost* $a^2 + b^2 = c^2$.

6) Vièteov poučak. *Ako su* $x_1$ *i* $x_2$ *rješenja kvadratne jednadžbe* $ax^2 + bx + c = 0$, *onda vrijede jednakosti*
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{d}.$$
P: $x_1$ i $x_2$ *su rješenja kvadratne jednadžbe* $ax^2 + bx + c = 0$.
Q: *Za brojeve* $x_1$ *i* $x_2$ *vrijede jednakosti*
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

* * *

Da bi se lakše moglo izdvojiti pretpostavku i tvrdnju u teoremu, teorem se obično formulira rečenicom oblika “ako ..., onda ...”. Prvi dio rečenice tada je pretpostavka

P, a drugi tvrdnja Q. Prednost ovakvog zapisa teorema u vezi s pitanjem strukture teorema i razumijevanja je očita. Zato je poželjno svaki poučak u nastavi matematike formulirati i u tom obliku, tj. tako da prvi dio, pretpostavka, započinje riječju "ako", a drugi dio, tvrdnja, započinje riječju "onda". Naravno, kadgod je to moguće učiniti na prirodan način. U primjeru 2 taj oblik ima samo poučak 6). Preformulirajmo i ostale.

**Primjer 3.**

1) *Ako su $a$ i $b$ uzastopni parni brojevi, onda je umnožak $ab$ djeljiv sa* 8.
2) *Ako je dani četverokut romb, onda su njegove dijagonale okomite.*
3) *Ako su u trokutu dvije stranice jednakih duljina, onda su kutovi nasuprot tih stranica jednaki.*
4) Talesov poučak. *Ako je dani kut obodni kut nad promjerom kružnice, onda je taj kut pravi kut.*
5) Pitagorin poučak. *Ako su $a$ i $b$ duljine kateta, a $c$ duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, onda vrijedi jednakost* $a^2 + b^2 = c^2$.

* * *

Poučak se može formulirati i na način da se pretpostavka i tvrdnja odvoje u posebne rečenice. I u takvom slučaju nije teško izvršiti preformuliranje na gore navedeni oblik, ali obično nema potrebe. Kraće rečenice se lakše i brže shvaćaju.

**Primjer 4.** Dokazni zadaci s matematičkih natjecanja.

1) Neka su brojevi $a$, $b$, $c$, $d$ redom ostaci dijeljenja broja $n$ sa 2, 3, 5 i 11. Dokažite da je zbroj $15a + 10b + 6c + 30d - n$ djeljiv sa 30.
2) U trokutu $ABC$ duljine stranica $a$, $b$ i $c$ povezuje jednakost $a+b = 2c$, $a > b$. Iz vrha $C$ povučene su visina $\overline{CD}$ i težišnica $\overline{CE}$. Dokažite da je $|DE| = a - b$.
3) Dan je trapez $ABCD$. Polovištem $M$ kraka $\overline{AD}$ nacrtana je okomica na pravac $BC$. Ako je $N$ nožište te okomice, dokažite da je površina $P$ trapeza dana sa $P = |BC| \cdot |MN|$.
4) Neka su $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$, $a_{n+1}$ različiti prirodni brojevi manji od $2n$. Dokažite da se među njima mogu naći bar 3 broja, tako da je jedan od njih jednak zbroju druga dva.
5) Kompleksni brojevi $z_1$, $z_2$, $z_3$ pridruženi su trima točkama $T_1$, $T_2$, $T_3$ kružnice $k(O, 1)$ i pri tome je $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Dokažite da je trokut $T_1T_2T_3$ jednakostraničan.

U svakom od ovih dokaznih zadataka uvjeti su vrlo jasno naznačeni: odmah se uočava što je pretpostavka, a što tvrdnja.

* * *

Logički zapis teorema je u obliku implikacije P $\Longrightarrow$ Q. Čitamo: "P *implicira* Q", "P *povlači* Q" ili "*Ako je* P, *onda je* Q". Ovaj treći način zapisa implikacije riječima, kao što smo vidjeli u gornjim primjerima, najpogodniji je za razumijevanje uloge pretpostavke P i tvrdnje Q u gradnji teorema.

**C)** Zamijene li se u teoremu međusobno pretpostavka i tvrdnja, dobiva se izjava koja se naziva **obrat teorema**. Zapis obrata teorema P $\Longrightarrow$ Q u obliku implikacije je Q $\Longrightarrow$ P. Obrat teorema ne mora biti istinit.

**Primjer 5.** Obrati poučaka.

Poučci:

*Ako $c$ dijeli $a$, onda $c$ dijeli umnožak $ab$.*

*Ako je u ravnini pravac $p$ okomit na pravac $q$, onda se pravci $p$ i $q$ sijeku.*

Obrati poučaka:

*Ako $c$ dijeli umnožak $ab$, onda $c$ dijeli $a$.*

*Ako se pravci $p$ i $q$ u ravnini sijeku, onda su oni okomiti.*

Obrati poučaka nisu istinite izjave. Nije teško naći prirodne brojeve $a$, $b$ i $c$, odnosno pravce $p$ i $q$ u ravnini za koje obrati ne vrijede.

* * *

Nastavna praksa pokazuje da učenici, osim poteškoća pri razlikovanju pretpostavke i tvrdnje u poučku, imaju dosta poteškoća i kada je riječ o obratu poučka i njegovom formuliranju. Ilustrirajmo to jednim jednostavnim zadatkom.

**Primjer 6.** Je li trokut čije su duljine stranica

1) $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$,
2) $a = 20$, $b = 21$, $c = 29$

pravokutan trokut?

Učenici ispravno krenu u provjeravanje jednakosti $a^2 + b^2 = c^2$ : $8^2 + 15^2 = 64 + 125 = 169 = 13^2$, $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 = 29^2$, ali onda najčešće krivo zaključe da "po Pitagorinom poučku" slijedi da su oba trokuta pravokutna. Međutim, odgovor na postavljeno pitanje ne slijedi iz samog Pitagorinog poučka, već je povezan s obratom Pitagorinog poučka. Zato je potrebno taj obrat u nastavi ili formulirati i dokazati, ili bar formulirati, ali prešućivanje obrata svakako nije dobro za razvoj mišljenja učenika.

* * *

Formulirajmo obrate triju poznatih školskih poučaka. Uspoređivanjem ranijih zapisa tih poučaka riječima, lako se uočava za našu svrhu prednost onih zapisa rečenicama oblika "ako . . . , onda . . . ".

**Primjer 7.**

1) Obrat Talesovog poučka. *Ako je $\angle ACB$ pravi kut, onda je on obodni kut kružnice nad promjerom $\overline{AB}$.*
2) Obrat Pitagorinog poučka. *Ako za duljine stranica $a$, $b$ i $c$ nekog trokuta vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$, onda je taj trokut pravokutan i pri tome je $c$ duljina njegove hipotenuze.*
3) Obrat Viéteovog poučka. *Ako su $a$, $b$, $c$ dani realni brojevi, $a \neq 0$, i $x_1$ i $x_2$ brojevi za koje vrijede jednakosti $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, onda su $x_1$ i $x_2$ rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$.*

Sva tri obrata su istinite izjave, tj. teoremi.

* * *

**D)** Uz već istaknute dvije implikacije $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ i $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$ mogu se promatrati i implikacije s negacijama $\rceil\mathrm{P}$ i $\rceil\mathrm{Q}$ izjava P i Q. Negaciju $\rceil A$ neke izjave $A$ čitamo "*non A*" ili "*nije A*" i znamo da je ona istinita kad je $A$ neistinita i obratno.

**Primjer 8.** Izjave i njihove negacije.

Izjave:

*Ne postoji paran prost broj.*
*Četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju je paralelogram.*
$\sqrt{2}$ *je iracionalan broj.*

Negacije izjava:

*Postoji paran prost broj.*
*Četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju nije paralelogram.*
$\sqrt{2}$ *nije iracionalan broj.* (Afirmativno: $\sqrt{2}$ *je racionalan broj*!).

Lako se uviđa da je prva izjava neistinita, a druga i treća istinite. Za njihove negacije vrijedi, naravno, obrnuto.

* * *

Često se promatra implikacija $\rceil\mathrm{Q} \Longrightarrow \rceil\mathrm{P}$. Izjava $\rceil\mathrm{Q} \Longrightarrow \rceil\mathrm{P}$ naziva se **kontrapozicija** izjave $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$. Na taj način sa svakim teoremom možemo povezati sljedeće četiri implikacije:

| | |
|---|---|
| $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ | (teorem) |
| $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$ | (obrat teorema) |
| $\rceil\mathrm{Q} \Longrightarrow \rceil\mathrm{P}$ | (kontrapozicija) |
| $\rceil\mathrm{P} \Longrightarrow \rceil\mathrm{Q}$ | (obrat kontrapozicije). |

U kakvom su odnosu te četiri implikacije otkrit će nam idući primjer iz planimetrije.

**Primjer 9.** Sukladnost i sličnost trokuta.

$(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q})$ *Ako su trokuti sukladni, onda su oni i slični.*

($Q \Longrightarrow P$) *Ako su trokuti slični, onda su oni i sukladni.*

($\rceil Q \Longrightarrow \rceil P$) *Ako trokuti nisu slični, onda oni nisu ni sukladni.*

($\rceil P \Longrightarrow \rceil Q$) *Ako trokuti nisu sukladni, onda oni nisu ni slični.*

Lako se uviđa da su prva i treća izjava istinite, a druga i četvrta neistinite.

* * *

Veze među izjavama uočene u primjeru 9 nisu slučajne. Uvijek su implikacije $P \Longrightarrow Q$ i $\rceil Q \Longrightarrow \rceil P$ istovremeno ili obje istinite, ili obje neistinite. Isto vrijedi i za implikacije $Q \Longrightarrow P$ i $\rceil P \Longrightarrow \rceil Q$. Za takav par izjava kažemo da su *ekvivalentne*. Odavde se dade zaključiti da su od četiri na početku odjeljka promatrane implikacije bitne samo prve dvije (teorem i obrat teorema). Međutim, kada se prijeđe na dokazivanje poučaka, pokazuje se korisnost i drugih dviju implikacija.

**Zaključak**. Poučak je jedan od najvažnijih matematičkih pojmova i njegova obrada zahtijeva posebnu pozornost svakog nastavnika matematike. Pravilna obrada toga pojma omogućuje brži razvoj matematičkog mišljenja učenika i bolje razumijevanje same matematike. Zato na kraju ponovo ističemo osnovna pitanja te obrade:

1) Precizno formuliranje poučka i moguće preformuliranje poučka.
2) Jasno razlikovanje pretpostavke i tvrdnje i razumijevanje njihove uloge u gradnji poučka.
3) Obrat poučka i njegova formulacija.
4) Formulacija negacije neke izjave.

Za razvoj matematičkog i logičkog mišljenja učenika ništa manje nije važno ni peto pitanje, pitanje dokazivanja poučaka. No, to pitanje razmotrit ćemo podrobnije u idućem broju časopisa.

* * *

## Jedan zadatak s pismenog ispita na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu

(14. veljače 1996.)

Neka je ♂ skup svih slobodnih mladića u Zagrebu, a ♀ skup svih slobodnih djevojaka u Zagrebu. Između ta dva skupa uspostavimo relaciju $\heartsuit$ definiranu sa: za $m \in$ ♂, $f \in$ ♀ je $m \heartsuit f$ ako i samo ako su $m$ i $f$ dogovorili izlazak za Valentinovo navečer (mogući su višestruki dogovori). Ako je $m \heartsuit f$, onda $m$ i $f$ promatramo kao uređeni par $\langle m, f\rangle$. Različiti parovi $\langle m, f\rangle$ i $\langle m', f'\rangle$ izići će u isti klub ako i samo ako su im ženski članovi isti ili $(m \not\heartsuit f' \ \wedge \ m' \not\heartsuit f)$. Budući da jedna osoba ne može biti na više mjesta istovremeno, uspostavljen je sljedeći prioritet klubova: ako je $m$ dogovorio sastanke u više klubova, otići će u onaj od njih u kojem se ukupno dogovorilo najviše parova. Provjerite postoji li klub (ili klubovi), i uz koje uvjete, u kojem (kojima) sigurno nijedna djevojka neće ostati sama, bez nekog od svojih dogovora! A klub(ovi) u koji(-e) će sigurno doći svi parovi koji su se tamo dogovorili? Formulirajte uvjet da sigurno postoji klub u kom će doći do tučnjave oko neke djevojke (smatrajte da do tučnjave dolazi ako se na istom mjestu nađe više mladića dogovorenih s istom djevojkom). Ako definiramo $L_m$ kao skup svih klubova u kojima $m$ ima dogovor, što predstavljaju $\min\limits_m(\max L_m)$ i $\max\limits_m(\min L_m)$, gdje $\min L_m$ i $\max L_m$ gledamo s obzirom na prioritet kako je gore definiran? Sve svoje tvrdnje dokažite!