175 godina od otkrića neeuklidske geometrije

Zdravko Kurnik, Zagreb

23. veljače 1826. godine ruski matematičar *Nikolaj Ivanovič Lobačevski* izložio je na zasjedanju Fizičko-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Kazanju svoj rad *"Kratko izlaganje osnova geometrije sa strogim dokazom teorema o paralelnim pravcima"*. Taj dan smatra se danom rođenja novog geometrijskog sustava — **neeuklidske geometrije**. U popratnom pismu on je molio da se rad razmotri i odobri za tiskanje. Međutim, povjerenstvo sastavljeno od tri profesora nije se udostojilo dati bilo kakvo mišljenje o ovom velikom otkriću. Nerazumijevanje novih ideja u Rusiji bilo je potpuno. Svoj rad on je kasnije, već kao rektor Sveučilišta, uključio u svoje opsežnije djelo *"O osnovama geometrije"*, tiskano tijekom 1829. i 1830. godine u *"Kazanjskom vjesniku"*.

Stvarajući novu geometriju Lobačevski je napravio prekretnicu u razvoju geometrije i izveo pravu revoluciju u matematičkom, pa i u cjelokupnom ljudskom mišljenju. Od stranih matematičara nove ideje mogli su u to vrijeme posve razumjeti i cijeniti samo veliki njemački matematičar, fizičar i astronom *Carl F. Gauss* i mađarski matematičar *Janos Bolyai*, jer su i sami došli na pomisao o postojanju neeuklidske geometrije. Gauss je osnovne ideje neeuklidske geometrije imao razrađene već 1824. godine, ali se zarekao da za života neće dopustiti njihovo objavljivanje, budući da *"...većina ljudi nema uopće pravi osjećaj za to, o čemu se tu radi"*. Bolyai je do svojih rezultata došao 1825. godine, ali ih je objavio tek 1832. godine kao dodatak, *"Appendix"*, udžbeniku elementarne i više matematike svoga oca Farkasa.

Ubrzo se iz korespondencije oca i njegova prijatelja Gaussa upoznaje i s radom Lobačevskog i saznaje da mu ne pripada prioritet otkrića nove geometrije. To saznanje na njega porazno djeluje i on poslije toga nije iz matematike više ništa objavio. Jedino Lobačevski, i pored svih neprilika i napada, ne odustaje i ustrajno se bori za svoje ideje, razrađujući i pojašnjavajući ih u dva svoja nova djela: *"Imaginarna geometrija"* (1835.) i *"Primjena imaginarne geometrije* *na neke integrale"* (1836.). Nekoliko sljedećih desetljeća neeuklidska geometrija bila je, zahvaljući vladajućem položaju euklidske geometrije i Kantovom idealističkom shvaćanju prostora, zapostavljena i ignorirana od većine matematičara. No, kada je godine 1860., pet godina nakon Gaussove smrti, počelo objavljivanje njegove korespondencije, matematička javnost doznala je i za njegovo pohvalno mišljenje o radovima Lobačevskog i Bolyaija. Gaussov veliki autoritet pojačao je tada interes matematičara za neeuklidsku geometriju.

* * *

Podsjetimo se malo podrobnije na to važno, 175 godina staro otkriće kroz jedan kraći povijesni osvrt.

Do III. stoljeća p. K. grčki matematičari skupili su veliko znanje i razvili djelotvorne istraživačke metode. Zato je bio sasvim prirodan pokušaj da se dotadašnja matematika sistematizira i cijela ili neke njezine teorije zasnuju na određenom broju jednostavnih istina, polaznih tvrdnji, koje se pretpostavljaju kao točne i bez dokaza. To je učinio *Euklid* oko 300. godine p. K. u svom glasovitom djelu "*Elementi*" u 13 knjiga. I pored izvjesnih nedostataka ovo je djelo sjajno dostignuće antike. Više od 2000 godina ono je služilo kao uzor sustavnog izlaganja elementarne geometrije i sve do XIX. stoljeća bilo osnovni udžbenik iz kojeg se ona učila.

Na početku "*Elemenata*" Euklid daje pregled nužnih definicija i polaznih tvrdnji geometrije, podijeljenih u dvije skupine. Polazne tvrdnje prve skupine karakteriziraju opća svojstva veličina i nazivaju se **aksiomi**. Ima ih 9. Takva je na primjer tvrdnja "cjelina je veća od dijela". Polazne tvrdnje druge skupine imaju čisto geometrijski karakter i nazivaju se **postulati**. Ima ih 5. Zatim se na temelju aksioma i postulata putem logičkog zaključivanja izvode i dokazuju teoremi i postupno izgrađuje cijela geometrija ravnine. Evo skupine od pet Euklidovih postulata:

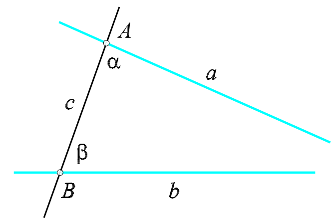
I. *Od svake točke do svake točke može se povući pravac.*

II. *Ograničeni pravac može se neprekidno produžavati po pravcu.*

III. *Iz svakog središta sa svakom udaljenošću može se opisati kružnica.*

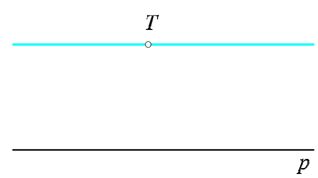
IV. *Svi pravi kutovi međusobno su jednaki.*

V. *Ako pravac koji siječe dva druga pravca tvori s njima s iste strane unutarnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta dva pravca neograničeno produžena sastaju se s one strane na kojoj je taj zbroj manji od dva prava kuta.*



Pomoću V. postulata dokazuju se mnogi teoremi elementarne geometrije. Među njima su i tvrdnje koje su mu ekvivalentne. U našim udžbenicima V. postulat iskazuje se u sljedećem ekvivalentnom i jednostavnijem obliku:

(E_0) *Točkom izvan pravca može se povući točno jedan pravac paralelan s tim pravcem.*

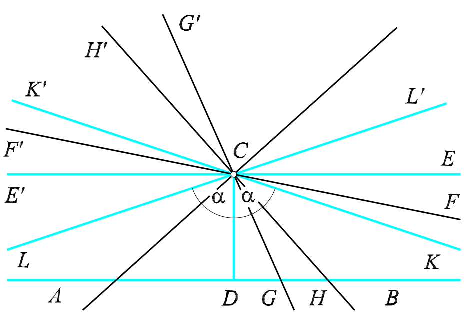


* * *

Sve do XIX. stoljeća nitko nije sumnjao u to da su svi Euklidovi postulati apsolutne i postojane istine i da je euklidska geometrija jedini geometrijski sustav. No, jedan je postulat od davnine privlačio posebnu pozornost: V. postulat. Razlog je dosta očigledan. Taj postulat je u odnosu na ostale znatno složeniji i stvorilo se mišljenje da je on ovisan o ostalim postulatima, te se prema tome može pomoću njih dokazati. Mnogi matematičari pokušali su dokazati V. postulat. Bezuspješno. Matematičari su se, dakle, pretežno bavili V. postulatom, iako Euklidova aksiomatika ima nekoliko drugih uočljivih nedostataka kao što su nepotrebne definicije osnovnih pojmova, zavisnost postulata (IV. postulat je nepotreban) i nepotpunost sustava aksioma (s današnjeg gledišta manjka čitav niz potrebnih aksioma, na primjer Arhimedov). To će pitanje primjereno razriješiti tek njemački matematičar *David Hilbert* 1899. godine u svom poznatom djelu *"Osnove geometrije"*.

Problem V. postulata Lobačevski je počeo sagledavati tako što je u svom udžbeniku *"Geometrija"* iz 1823. godine najprije izdvojio sve ono što ne ovisi o tom postulatu. Tako je prvi puta u svijetu potpuno odvojena tzv. **apsolutna geometrija**. Analizirajući postojeće dokaze V. postulata, dolazi do određenih zaključaka o njima i pokušava ga i sam dokazati, ali uskoro uviđa da je to uzaludan posao i donosi presudan zaključak: V. postulat je nedokaziv! Zatim je problemu prišao s nove strane. Uočio je da je Euklidov zahtjev u V. postulatu, odnosno u ekvivalentnoj tvrdnji (E_0) previše uzak (paralele su okomice na isti pravac), a po njegovom mišljenju teorija paralelnih pravaca mora biti općenitija i dublja. To je bila prijelomna točka. Tri godine pojačanih napora u istraživanjima stroge izgradnje osnova geometrije konačno su ga dovele do rješenja problema.

Kako je to Lobačevski postigao? Pogledajmo pažljivo donju sliku.



Neka su u ravnini dani pravac AB i izvan njega točka C i neka je CD okomica na pravac AB, a $E'E$ okomica na pravac CD u točki C. Sada se promatraju različiti pravci točkom C. Jedni od njih, kao na primjer pravci CG i CH, sijeku pravac AB. S druge strane, pravac $E'E$ ne siječe taj pravac. Prema V. postulatu slijedi da je pravac $E'E$ jedini pravac točkom C koji ne siječe pravac AB. I obrnuto, ako uzmemo da je pravac $E'E$ jedini pravac točkom C koji ne siječe pravac AB, onda vrijedi V. postulat. Drugim riječima, te dvije tvrdnje su ekvivalentne.

Lobačevski kreće novim putem. On uzima da postoji **još najmanje jedan pravac** različit od pravca $E'E$, recimo pravac $F'F$, koji prolazi točkom C i ne siječe pravac AB. U tom slučaju i svi pravci točkom C unutar kutova $\sphericalangle FCE$ i $\sphericalangle F'CE'$ ne presijecaju pravac AB, pa u ravnini točkom C prolazi zapravo beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku pravac AB. Sada se svi pravci koji prolaze pravim kutom $\sphericalangle DCE$ dijele u dvije klase: pravce koji sijeku pravac AB i pravce koji ga ne sijeku. Odavde slijedi da postoji granični pravac KK' koji razdvaja te klase. Lako se pokazuje da taj pravac pripada drugoj klasi. Na temelju simetrije postoji i drugi granični pravac LL' koji u pravom kutu $\sphericalangle E'CD$ dijeli pravce na dvije slične klase.

Granične pravce KK' i LL' Lobačevski je nazvao **paralelama** s pravcem AB, a kut $\alpha = \sphericalangle DCK = \sphericalangle DCL$ **kutom paralelnosti**. Ravnina u kojoj se ostvaruje zahtjev Lobačevskog danas se naziva **ravnina Lobačevskog** ili **hiperbolička ravnina**.

Prema tome, pitanje paralelnih pravaca Lobačevski je razriješio na taj način da je Euklidov V. postulat zamijenio novim aksiomom o paralelnim pravcima koji glasi:

(L_0) *Točkom izvan pravca u ravnini prolaze dva pravca koji su paralelni s tim pravcem.*

Na temelju aksioma (L_0) i ostalih aksioma Lobačevski izgrađuje novi geometrijski sustav koji je on nazvao **imaginarna geometrija**. Gauss je toj geometriji dao naziv **neeuklidska geometrija**. Danas se ona još naziva **geometrija Lobačevskog** ili **hiperbolička geometrija**.

Zanimljivo je pogledati neke postavke novootkrivene geometrije:

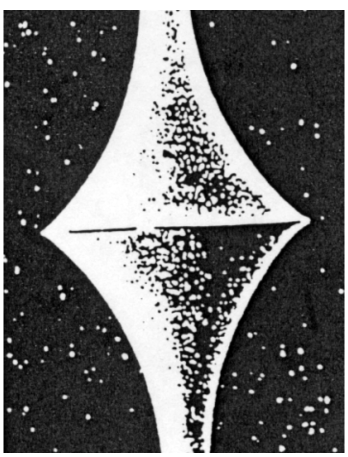
1) Zbroj kutova u trokutu manji je od dva prava kuta.
2) Trokut je određen svojim kutovima, pa zato ne postoje slični nesukladni trokuti.
3) Postoji trokut maksimalne površine.
4) Skup točaka jednako udaljenih od pravca nije pravac.
5) Postoji apsolutna jedinica za mjerenje duljine.

Većina teorema hiperboličke geometrije razlikuje se od euklidskih. S druge strane, u malim dijelovima hiperboličke ravnine svi odnosi su približno euklidski.

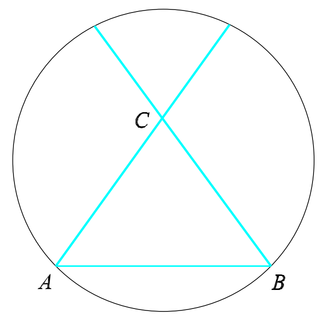
* * *

Lobačevski je daleko razvio ideje nove geometrije, ali do kraja života nije našao odgovor na važno pitanje: je li geometrija koju je otkrio neproturječna? Postoji i mišljenje da veliki Gauss nije objavio rezultate svojih istraživanja o neeuklidskoj geometriji upravo zato što još nije znao odgovor na gornje pitanje. Odgovor na pitanje i potvrda novih ideja nađena je tek poslije smrti svih triju otkrivača.

Dokazivanje neproturječnosti nove geometrije počinje 1868. godine pojavom radova talijanskog matematičara *E. Beltramija*. Za hiperboličku geometriju važnu ulogu odigrala je pri tome jedna ravninska krivulja i jedna rotacijska ploha. Krivulja se naziva **traktrisa** i ima svojstvo da je duljina odreska tangente u bilo kojoj njezinoj točki od dirališta do sjecišta s jednim čvrstim pravcem — osi traktrise, konstantna. Rotacijom traktrise oko njezine osi nastaje ploha koja se naziva **pseudosfera**. Geometrija na pseudosferi lokalno je hiperbolička geometrija. Tu plohu vidite na donjoj slici.



Neproturječnost nove geometrije prvi je u potpunosti dokazao njemački matematičar *Felix Klein* 1872. godine u svojoj glasovitoj raspravi, poznatoj pod nazivom "*Erlangenski program*", proučavajući jedan euklidski model hiperboličke ravnine. Točke hiperboličke ravnine su točke unutrašnjosti jednog kruga, pravci hiperboličke ravnine su tetive kruga, a paralelnim pravcima hiperboličke ravnine odgovaraju tetive koje imaju jednu zajedničku krajnju točku. Nije teško vidjeti da je u ovoj interpretaciji hiperboličke ravnine zadovoljen aksiom paralelnosti Lobačevskog. Kad bi u nekom svom dijelu nova geometrija bila proturječna, proturječnost bi se pojavila i u navedenom modelu, a to znači i u samoj euklidskoj geometriji.



* * *

Otkriće hiperboličke geometrije dalo je snažan poticaj bržem razvoju geometrije, matematike, pa i drugih znanosti: izgrađene su brojne nove neeuklidske geometrije, izrastao je suvremeni pogled na geometriju, potaknut je daljnji razvoj aksiomatske metode, došlo je do kidanja starih filozofskih nazora o prostoru i vremenu i oblikovanja novog shvaćanja prostora, pojavile su se nove mogućnosti primjene geometrije. Drugim riječima, prekretnica ljudskog mišljenja. A na početku te prekretnice tri imena: Bolyai, Gauss i Lobačevski.