



Broj π i vjerojatnost

Damir Brozović i Marina Čobanov, Zagreb

Većina ljudi broj π povezuje s kružnicom i geometrijom i ne očekuju ga negdje drugdje u matematici. Evo jednog negeometrijskog postupka za eksperimentalno određivanje broja π .

Dakle, želite li eksperimentalno odrediti broj π , potreban vam je samo prazan list papira veličine A3 i kutija šibica.

Na listu papira izvucite niz paralelnih pravaca razmaknutih za duljinu šibice. Potom, s visine od oko četrdesetak cm, bacite na taj list šibice iz jedne kutije te prebrojite koliko šibica siječe neki od pravaca (možete i više puta baciti jednu šibicu). Radi veće točnosti bacanje ponovite više puta. Što više to bolje! Kad vam dojadi, podijelite udvostručeni broj svih šibica koje ste bacili sa ukupnim brojem šibica koje su sjekle pravce i trebali biste dobiti približnu vjerojatnost broja π

$$\frac{2 \cdot \text{broj svih šibica}}{\text{broj svih šibica koje sijeku pravce}} \approx \pi.$$

Ako slučajno vaš rezultat ne izgleda kao da je aproksimacija broja π , ne morate se previše brinuti, jer je ovdje učinkovitost nažalost vrlo loša. Izračunato je da treba prosuti ot-

prilike 900.000 šibica da bi se s vjerojatnošću od 95% postigla točnost od 1%.

Mi smo uspjeli, bacivši “samo” 27 941 šibicu, dobiti točnost na dvije decimale.

Opisani eksperiment, ali s iglom, prvi je izveo francuski prirodoslovac George Louis Leclerc Comte de Buffon (1707. – 1788.). Buffon je bio poznat kao vrstan botaničar i upravitelj Kraljevskog vrta. Međutim poznatiji je po svojim iglicama, po njemu nazvanim Buffonove igle.

Mnogi su matematičari kasnije pokušavali Buffonovom metodom odrediti broj π :

— 1850. g. Wolf je bacio 5 000 iglica s omjerom $a/b = 0.8$. Imao je 2 532 presijecanja, iz čega je izveo približnu vrijednost $\pi \approx 3.1596$.

— 1855. g. Smith u Aberdeenu je bacio 3 204 iglice s omjerom $a/b = 0.6$ te nabrojao 1 218.5 presijecanja (polupresijecanja odgovaraju nejasnim slučajevima); iz toga je izveo približnu vrijednost $\pi \approx 3.1553$.

— 1860. g. August de Morgan bacio je 600 iglica s omjerom $a/b = 1$ te dobio 382.5 presijecanja; iz toga je izveo približnu vrijednost $\pi \approx 3.137$.

— 1864. g. bacio je Fox 1 030 iglica s omjerom $a/b = 0.75$ i dobio 489 presijecanja; iz toga je izveo približnu vrijednost $\pi \approx 3.1595$.

— 1901. g. Lozzerini je bacio 3 404 iglice s omjerom $a/b = 0.5419$ i dobio 1 808 presijecanja; iz toga je izveo približnu vrijednost $\pi \approx 3.1415929$, što je točnost na šest decimala.

— 1925. g. je Reina bacio 2 520 iglica s omjerom $a/b = 0.5419$ i dobio 859 presijecanja; iz toga je izveo približnu vrijednost $\pi \approx 3.1795$.

— Konačno je 2001. 41 učenik 1. gimnazije bacio sveukupno 27 941 šibica s omjerom $a/b = 1$ i s ukupnim brojem presijecanja 17 757 iz čega je izvedena približna vrijednost broja $\pi \approx 3.14704 \dots$

Zanimljiv je prijedlog dao N. Gridge-man. Predložio je da se upotrijebe iglice odgovarajuće veličine. Ako na primjer uz-

memo $a = 78.5398$ cm i $b = 1$ m, onda je vjerojatnost zadana Buffonovom formulom $2 \cdot 0.785398/\pi$. Ako naime bacimo samo dvije iglice, od kojih će jedna presijecati rub jedne podne daske, a druga neće, dobit ćemo rezultat $1/2$, iz čega proizlazi približna vjerojatnost $\pi \approx 4 \cdot 0.785398 = 3.141592$, koja uopće nije tako loša. Čini nam se da se Gridge-man htio našaliti sa svojim prethodnicima koji su približnu vrijednost broja π odredili pomoću upravo opisanog eksperimenta s iglicama i pri tome povremeno i frizirali svoje rezultate (Lozzerinijev rezultat je prelijep, da bi bio istinit).

Međutim, eksperiment proveden u našoj školi napravljen je baš s namjerom da odredimo broj π bez ikakvih friziranja i namještanja. Nakon što je 41 učenik skoro ispustio dušu bacajući sve te šibice, ne bi bilo lijepo umanjivati njihov mukotrpan rad namještenim rezultatima. Dakle evo tih famoznih rezultata bacanja šibica:

Redni broj učenika	sveukupni broj bačenih šibica	broj šibica koje su pale na crtu	Redni broj učenika	sveukupni broj bačenih šibica	broj šibica koje su pale na crtu	Redni broj učenika	sveukupni broj bačenih šibica	broj šibica koje su pale na crtu
1.	600	384	15.	720	485	29.	900	418
2.	564	392	16.	540	347	30.	800	556
3.	600	396	17.	540	321	31.	860	560
4.	600	387	18.	585	362	32.	800	473
5.	569	372	19.	600	395	33.	663	462
6.	600	377	20.	640	480	34.	740	490
7.	570	363	21.	600	286	35.	840	495
8.	800	474	22.	840	557	36.	800	499
9.	525	346	23.	780	462	37.	600	423
10.	585	305	24.	960	664	38.	760	502
11.	600	431	25.	600	390	39.	720	433
12.	570	322	26.	600	338	40.	780	512
13.	540	370	27.	800	574	41.	780	503
14.	570	365	28.	800	459	Σ	10 043	6 326
Σ	8 293	5 284	Σ	9 605	6 147			

$$\Sigma \quad \boxed{27\,941} \quad | \quad \boxed{17\,757}$$

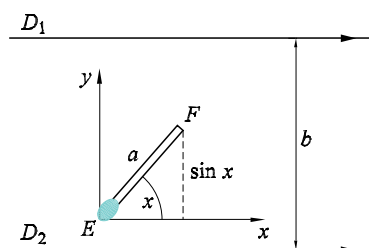
$$\pi \approx \frac{2 \cdot 27\,941}{17\,757} = 3.147040603 \dots$$

Eto vidite! Dobili smo preciznost u dvije decimale. Međutim, moramo napomenuti da će na rezultate utjecati nesavršenosti kao što su neravan papir i nepreciznost oka (pogotovo nervoznog), tj. pogreška u očitavanju rezultata. Zaključak: što više puta bacamo šibicu to ćemo dobiti precizniji rezultat.

Kako ne bi ispalo da se Buffonovom metodom slučajno dobiva broj koji započinje istim znamenkama kao i broj π , evo matematičkog dokaza formule s početka teksta.

Čitatelji kojima se žuri, kao i svi kojima matematička vjerojatnost i integrali nisu omiljena područja matematike mogu sljedećih nekoliko odlomaka slobodno preskočiti. Inače, dokaz je sasvim elementaran i lako razumljiv!

Ukratko i malo pojednostavljeno: pokazat ćemo kako je vjerojatnost da će slučajno bačena šibica pasti preko nekog pravca jednaka $\frac{2}{\pi}$.



Sl. 1.

Dokaz. Uzet ćemo jednu šibicu duljine a i njezine krajnje točke označiti s E i F . Promatramo skup paralelnih pravaca uz pretpostavku da je razmak između dvije paralele jednak b . Nadalje pretpostavimo da je $a < b$ (kako bismo isključili mogućnost da jedna šibica padne preko više pravaca) i bacimo zatim šibice na ovaj skup paralela. Tražit ćemo vjerojatnost da šibica pogodi jedan pravac iz tog skupa.

Ograničit ćemo se na traženje vjerojatnosti da šibica padne preko pravca D_1 , pa će zbog simetrije problema tražena vjerojatnost da padne ili preko pravca D_1 ili preko pravca D_2 biti dvostruko veća.

Fiksirajmo točku E negdje između pravaca D_1 i D_2 . Hoće li šibica sjeći gornji pravac ili neće ovisit će o dvije stvari: udaljenosti y točke E do pravca D_1 i o kutu x između EF i smjera orijentiranog skupa paralela. Očito je da su te dvije veličine međusobno potpuno neovisne te da su sve vrijednosti za x i za y jednako vjerojatne.

Budući da nas zanima samo presjek šibice i gornjeg pravca, kut x se nalazi između 0 i π . Da bi šibica sijekla pravac D_1 , mora biti $y < x \sin x$.

Problem ćemo riješiti preko geometrijske vjerojatnosti.

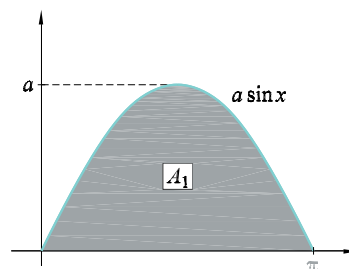
Budući da preklapanje šibice i pravca ovisi o dvije veličine x i y , zabilježimo ih u obliku uređenog para (x, y) , pa sve možemo promatrati u koordinatnoj ravnini. Do preklapanja će doći za sve uređene parove (x, y) iz skupa $A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq b, y < a \sin x\}$. Svih mogućih položaja šibice (to znači i onih gdje je kraj šibice, točka F , okrenut prema donjem pravcu) ima koliko i uređenih parova u skupu $A = \{(x, y) : -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq b\}$. Tada je tražena vjerojatnost omjer površina skupova A_1 i A .

Budući da je skup A_1 s gornje strane omeđen lukom sinusoide, njegova je površina

$$P_{A_1} = \int_0^{\pi} a \sin x dx$$

$$= -a \cos \pi + a \cos 0 = 2a.$$

Skup A običan je pravokutnik čija je površina $P_A = 2\pi \cdot b$.



Sl. 2.

Dakle, vjerojatnost da šibica siječe pravac D_1 jednaka je $\frac{P_{A_1}}{P_A} = \frac{2a}{2\pi b} = \frac{a}{\pi b}$, a vjerojatnost da siječe bilo koji od pravaca D_1 ili D_2 je $2 \cdot \frac{a}{\pi b} = \frac{2a}{\pi b}$.

Ako je $a = b$, kao u našem slučaju, onda šibica siječe pravac s vjerojatnošću od $2/\pi = 0.636619 \dots$ ■

Prevedeno na naš pokus:

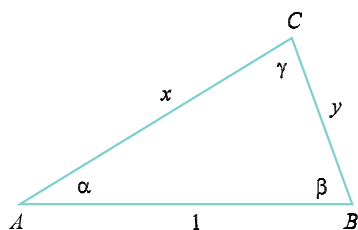
$$\frac{\text{broj šibica palih preko crte}}{\text{broj svih šibica}} = \frac{2}{\pi}.$$

* * *

Zanima li vas još neki eksperiment u vezi s brojem π ? Evo jednog. Zamislite dva broja, između 0 i 1. Kolika je vjerojatnost da zajedno s brojem 1 čine stranice tupokutnog trokuta?

Odgovor: $\frac{\pi^2 - 2}{4}$.

Dokaz slijedi.



Sl. 3.

Najprije imamo uvjete na duljine stranica

$$1 + x > y, \quad 1 + y > x, \quad \text{te} \quad x + y > 1 \quad (1)$$

kako bi trokut uopće postojao. Nadalje, najveći kut, kut γ , je nasuprot najveće stranice, stranice duljine 1. Ako je (1) zadovoljeno, onda će $(x, y, 1)$ činiti ili tupokutan ili pravokutan trokut. Da tip trokuta ovisi o izrazu $x^2 + y^2$, dokazuje se kosinusovim poučkom na $\triangle ABC$. Pa imamo:

$$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \gamma, \quad \text{tj.}$$

$$x^2 + y^2 = 1^2 + 2xy \cdot \cos \gamma.$$

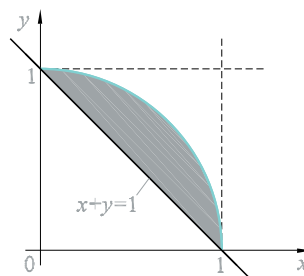
Ako je kut γ tup, $\cos \gamma$ mora biti negativan. Dakle, uvjet da trokut bude tupokutan je

$$x^2 + y^2 < 1. \quad (2)$$

Primijenimo li koordinatnu metodu na rješavanje zadatka, uvjet

$$0 < x, \quad y < 1,$$

ograničava izbor rješenja na kvadrat površine 1 u prvom kvadrantu. Sustav uvjeta na duljine stranica (1) te onaj za tupokutan trokut (2) dalje sužavaju taj izbor na osjenčani kružni odsječak (slika 4.).



Sl. 4.

Vjerojatnost da će slučajno odabrani brojevi x i y zadovoljavati dane uvjete jednaka je omjeru površine kvadrata (iznosi 1) i površine osjenčanog odsječka:

$$p = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 2}{4}.$$

Jednostavno, zar ne?

* * *

