Fibonaccijev niz i Pitagorine trojke

Jens Carstensen Frederiksberg i Alija Muminagić, Nykøbing F. – Danska

Od mnogo interesantnih svojstava koje ima Fibonaccijev niz navodimo i ovo: promatrajmo četiri susjedna člana u Fibonaccijevu nizu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., npr. 2, 3, 5, 8. Načinimo produkt vanjskih članova, tj. $2 \cdot 8 = 16$ *i dvostruki produkt unutarnjih članova, tj.* $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. *Nakon kvadriranja i zbrajanja dobivamo*

$$16^2 + 30^2 = 256 + 900 = 1\,156 = 34^2. \tag{1}$$

Dobili smo dakle Pitagorinu trojku (16, 30, 34). Uzmimo sada npr. 5, 8, 13, 21. Na isti način kao gore dobivamo

$$\begin{aligned} 105^2 + 208^2 &= 11\,025 + 43\,264 = 54\,289 \\ &= 233^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Sad je to Pitagorina trojka (105, 208, 233). (1) i (2) možemo pisati u obliku

$$(a_3 \cdot a_6)^2 + (2 \cdot a_4 \cdot a_5)^2 = a_9^2$$
$$(a_5 \cdot a_8)^2 + (2 \cdot a_6 \cdot a_7)^2 = a_{13}^2.$$

Naslućujemo da vrijedi

$$(a_{n-1} \cdot a_{n+2})^2 + (2 \cdot a_n \cdot a_{n+1})^2 = a_{2n+1}^2. \tag{3}$$

Dokazat ćemo (3).

Zbog $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 1$ *imamo*

$$\begin{aligned} &[a_{n-1} \cdot (a_{n+1} + a_n)]^2 + [2a_n(a_n + a_{n-1})]^2 \\ &= [a_{n-1}(a_n + a_{n-1} + a_n)]^2 + (2a_n^2 + 2a_n^2 + 2a_n a_{n-1})^2 \\ &= (2a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2)^2 + (2a_n^2 + 2a_n a_{n-1})^2 \\ &= 4a_n^2 a_{n-1}^2 + 4a_n a_{n-1}^3 + a_{n-1}^4 + 4a_n^4 + 8a_n^3 a_{n-1} + 4a_n^2 a_{n-1}^2 \\ &= (a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-1} + 2a_n^2)^2 = (a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-1} + a_n^2 + a_n^2)^2 \\ &= [(a_{n-1} + a_n)^2 + a_n^2]^2 = [a_{n+1}^2 + a_n^2]^2 = a_{2n+1}^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Da je $a_{n+1}^2 + a_n^2 = a_{2n+1}$ *vidite primjerice u knjizi: Andrej Dujella, Fibonaccijevi brojevi, Hrvatsko matematičko društvo, 2000., Zagreb.*

(Ili dokažite da je $a_{n+1}^2 + a_n^2 = a_{2n+1}$, *pomoću Binetove formule:*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].)$$