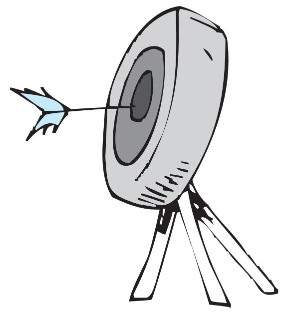


Sredine i trapez

Branimir Dakić, Zagreb

Za pozitivne realne brojeve a i b definiraju se **aritmetička**, **geometrijska**, **harmonijska** i **kvadratna sredina**. To su redom brojevi:

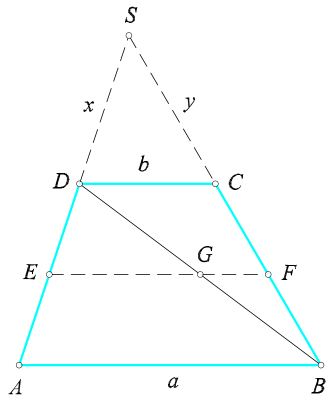
$$A = \frac{a+b}{2}; \qquad G = \sqrt{a \cdot b};$$

$$H = \frac{2ab}{a+b}; \qquad K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Te brojeve možemo shvatiti kao duljine nekih dužina pa te dužine zorno predočiti na trapezu.

Evo kako:

Nacrtajmo trapez i neka su a i b duljine njegovih osnovica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, a c i d duljine njegovih krakova $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$. Pokazat ćemo da je dužina $\overline{EF}$, gdje su E i F polovišta krakova, po duljini jednaka aritmetičkoj sredini duljina a i b osnovica trapeza. Prisjetimo se da je ta dužina *srednjica trapeza*.



Odredimo točku S u kojoj se sijeku produženi krakovi trapeza. Kako su pravci AB i CD paralelni, trokuti $\triangle ABS$ i $\triangle DCS$ su slični i vrijedi:

$$x : (x+d) = y : (y+c),$$

a odatle, zbog svojstava omjera, slijedi

$$x : \left(x + \frac{d}{2}\right) = y : \left(y + \frac{c}{2}\right),$$

što znači da su trokuti $\triangle EFS$ i $\triangle DCS$ slični pa su dužine $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ i $\overline{CD}$ paralelne.

Dakle je srednjica trapeza paralelna njegovim osnovicama.

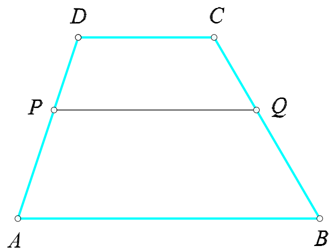
Povucimo sada jednu dijagonalu trapeza. Srednjica je siječe u točki G te je $|EG| = \frac{a}{2}$ i $|GF| = \frac{b}{2}$, pa odatle slijedi

$$|EF| = \frac{a+b}{2}.$$

Duljina srednjice trapeza $\overline{EF}$ aritmetička je sredina duljina osnovica trapeza.

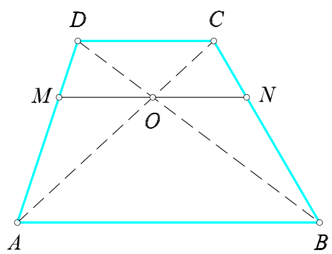
Neka su sada točke P i Q na kraku $\overline{AD}$, odnosno $\overline{BC}$, trapeza $ABCD$ odabrane tako da dužina $\overline{PQ}$ dijeli trapez na dva slična trapeza. Tada je $|AB| : |PQ| = |PQ| : |CD|$, odnosno $|PQ|^2 = |AB| \cdot |CD|$, tj.

$$|PQ| = \sqrt{a \cdot b}.$$



Duljina dužine $\overline{PQ}$ koja trapez dijeli na dva slična trapeza geometrijska je sredina duljina osnovica trapeza.

Pogledajmo sada i sljedeću konstrukciju:



Položimo sjecištem O dijagonala trapeza pravac MN paralelan s osnovicama trapeza. Uočimo slične trokute $\triangle AOM$ i $\triangle ACD$ te $\triangle MOD$ i $\triangle ABD$. Označimo li sa v, v_1 i v_2 visine trokuta $\triangle ABD$, $\triangle MOD$ i $\triangle AOM$, te $x = |MO|$, možemo pisati jednakosti:

$$\frac{x}{b} = \frac{v_2}{v}, \qquad \frac{x}{a} = \frac{v_1}{v}.$$

Zbrojimo li ih, dobit ćemo:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{v_1 + v_2}{v} = 1,$$

odnosno

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Analogno se dobije $|ON| = \dfrac{ab}{a+b}$, te je

$$|MN| = \frac{2ab}{a+b}.$$

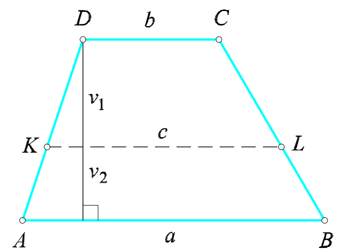
Duljina dužine $\overline{MN}$ koja prolazi sjecištem dijagonala trapeza i paralelna je njegovim osnovicama harmonijska je sredina duljina tih osnovica.

I konačno:

Duljina dužine $\overline{KL}$ koja trapez dijeli na dva dijela jednakih površina kvadratna je sredina duljina osnovica trapeza.

Ni ovu činjenicu nije teško provjeriti. Uvedimo oznake kao na slici. Zahtijeva se da je $\dfrac{a+c}{2} \cdot v_2 = \dfrac{b+c}{2} \cdot v_1$, te

$$\frac{a+b}{2} \cdot (v_1 + v_2) = \frac{a+c}{2} \cdot v_2 + \frac{b+c}{2} \cdot v_1.$$



Iz ove dvije jednakosti dobije se sustav jednadžbi:

$$(a-c)\cdot v_1 = (c-b)\cdot v_2, \quad (b+c)\cdot v_1 = (a+c)\cdot v_2.$$

Jednadžbe podijelimo te brzo potom dobijemo $c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$, pa je zaista

$$|KL| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Konačno, za pozitivne brojeve a i b jednostavno je dokazati da vrijedi sljedeći niz nejednakosti:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Protumačite ga zorno na trapezu.