Izraz i jednakost
– temeljni, a zanemareni pojmovi

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb

U nastavi matematike neki su nam pojmovi jako važni, naglašavamo ih, pazimo, ispravljamo učenike ako treba i stotinu puta. S druge strane, neki drugi, također važni pojmovi kao da prođu "ispod radara". Nastavnik podrazumijeva da ih učenik u potpunosti razumije i stoga se ne obazire previše na njih, iako se ti pojmovi zapravo nisu pošteno obradili od početka. Jedan primjer takvih propusta javlja se kod pojmova izraz i jednakost, što oni znače te koje su razlike među njima.

Uvod

Zadnjih se godina mnogo govori o matematičkoj komunikaciji u nastavi. Matematička komunikacija može se odnositi na više načina i razina interakcija i razmjene informacija. Između ostalog, ona se odnosi i na matematički jezik te učenje, poznavanje i razumijevanje matematičkog jezika u školi. Jedna od osnovnih jedinica tog učenicima novog jezika svakako je **jednakost**, a uz nju se vežu i pojmovi **izraz** te **jednadžba**. Vezano za to, nameću se sljedeća pitanja: Jesu li naši učenici svjesni što znače ovi pojmovi i koje su razlike među njima? Jesmo li im ove termine jasno izložili jedan uz drugoga uz primjere? Možemo li uopće krenuti rješavati ijedan aritmetički zadatak ako nismo sigurni poznaju li učenici uistinu ove pojmove? Na koncu, nudi li naš kurikul jasan ishod da učenik treba razlikovati ove pojmove? Je li u udžbeničkim zadatcima objašnjena razlika između izraza i jednakosti? Prema mojim saznanjima, odgovor na većinu ovih pitanja je NE, što ukazuje da se ovi temeljni pojmovi uistinu zanemaruju u nastavi matematike kroz cijelu obrazovnu vertikalu. Stoga zaslužuju da im se posveti jedan tekst u MiŠ-u.

Matematički izrazi

Pri uvođenju ili ponavljanju pojma matematičkog izraza učenike prvo možemo pitati što znači u svakodnevnom govoru riječ *izraz*, gdje su ga čuli ili koristili te što znači: *izraziti se* te *izražavati se*. Učenici mogu dati i primjere uobičajenih rečenica u kojima se koriste te riječi. To može biti dobar uvod za pitanje: Što bi to bio matematički izraz?

Prema Hrvatskoj enciklopediji (2019.), **matematički izraz** odnosi se na konačno mnogo mate-

doc. dr. sc. Dubravka Glasnović Gracin, Katedra za matematiku i statistiku, Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, `dubravka.glasnovic@gmail.com`

matičkih znakova (brojeva, simbola, zagrada, operatora) kojima se prikazuju matematičke veličine i matematičke operacije. Matematički izraz može biti aritmetički (npr. $2+3$), algebarski (npr. a^2+b^2), trigonometrijski (npr. $\sin^2 x+\cos^2 x$), analitički (npr. $\int f(x)dx$) i sl.

Izraz može biti jednostavan i složen. Jednostavni izrazi mogu biti brojevi ili varijable, npr. 5 ili x. Također, u jednostavne izraze spadaju oni izrazi koji se sastoje od jedne računske operacije, npr. $5x$ ili $5+x$ ili 5^2. Složeni izrazi su oni izrazi koji se sastoje od više računskih operacija, primjerice: $12-(6x+3)+5x$. Također, izraz $(3x-5)^2$ je složen, a u složene izraze spadaju i algebarski razlomci i sl.

Jednakost

Kada govorimo o jednakosti u matematici, možemo misliti na samu relaciju jednakosti te na zapis "izraz1 = izraz2" u kojem se pojavljuje znak jednakosti.

Još su stari Egipćani imali poseban znak za jednakost (Gusić, 1995.). Matematičar Robert Recorde (1510. – 1558.) u svojoj je knjizi *The Whetstone of Witte* 1557. godine spomenuo znak jednakosti $=$. Svoju ideju obrazložio je sljedećim riječima: "nikoja dva predmeta ne mogu međusobno biti više jednaka od dvaju paralelnih odsječaka $(=)$" (Gleizer, 2003. str. 9). Simbol "$=$" nije odmah postao popularan. Recordeov znak jednakosti počeo se učestalije koristiti tek sto godina kasnije. Više o povijesti znaka jednakosti čitatelj može naći u MiŠ-u br. 86 (Brueckler, 2016.).

Recimo prvo nešto o relaciji jednakosti. To je relacija na elementima nekog skupa koja ima određena svojstva. Ako su x i y u toj relaciji, zapisujemo to kao $x=y$. Osnovna svojstva relacije jednakosti brojeva su:

- Svojstvo **refleksije**: $x=x$.
- Svojstvo **simetrije**: ako je $x=y$, onda je $y=x$.
- Svojstvo **tranzitivnosti**: ako je $x=y$ i $y=z$, onda je $x=z$.

S obzirom na to da ova relacija ima svojstva refleksije, simetrije i tranzitivnosti, jednakost je relacija ekvivalencije. Osim toga, za relaciju jednakosti vrijedi:

- Svojstvo **zbrajanja**: ako je $x=y$, onda je $x+z=y+z$.
- Svojstvo **oduzimanja**: ako je $x=y$, onda je $x-z=y-z$.
- Svojstvo **množenja**: ako je $x=y$, onda je $x\cdot z=y\cdot z$.
- Svojstvo **dijeljenja**: ako je $x=y$, a $z\neq 0$, onda je $x:z=y:z$.
- Svojstvo **supstitucije**: ako je $x=y$, onda y može biti zamijenjen za x u svakom izrazu.

S obzirom na to da se u ovom članku fokusiramo na školsku matematiku, u tekstu koji slijedi pod terminom jednakosti podrazumijevat ćemo zapis

izraz1 = izraz2

u kojem se koristi znak jednakosti. Gusić (1995.) navodi da se jednakost može odnositi i na zapis činjenice da su dvije veličine jednake, npr. $6=\frac{12}{2}$ je jednakost. Također, autor spominje i situaciju jednakosti u kojoj su dvije veličine povezane znakom jednakosti, makar i nisu jednake, npr. $3=5$. Tada govorimo o neistinitoj jednakosti. Naravno, u školskoj aritmetici i algebri zanimaju nas samo istinite jednakosti. Gusić (1995.) navodi i primjer jednakosti "po definiciji", npr. $f(x)=2x$. Njome uvodimo funkciju f koja svakom realnom broju pridružuje njegov dvokratnik. Jednakost "po definiciji" označavamo simbolom $:=$.

Jednakost se uvodi u prvom razredu osnovne škole, uz nejednakost. Modeli jednakosti opisani su u MiŠ-u br. 86, u članku "Balansirajuća greda" (Horvat i Glasnović Gracin, 2016.). Već u razrednoj nastavi možemo uvesti jednakost kao "matematičku rečenicu" koja se sastoji od triju dijelova:

znaka $=$, lijeve strane jednakosti i desne strane jednakosti. Kasnije, kad upoznaju pojam izraza, ovo "lijeva/desna strana jednakosti" treba nadopuniti s "*izraz* na lijevoj/desnoj strani jednakosti".

Važno je učenicima prikazati različite primjere jednakosti dvaju izraza, npr. prvo s jednostavnim izrazima:

$$2+3=5, \qquad 4=4, \qquad 1=3-2.$$

Tu se posebno ističe treći primjer u kojem je rezultat na lijevoj strani jednakosti. S obzirom na to da je uobičajeno u zadatcima za učenike da se rezultat nalazi na desnoj strani jednakosti, kod učenika može doći do zablude (miskoncepcije) da jednakost ima neku vrstu obaveznog smjera "slijeva nadesno", tj. da nema svojstvo simetrije. Stoga je za shvaćanje pojma jednakosti izuzetno važno da se učenici s vremena na vrijeme susretnu sa zadatcima tipa: $\_\_ = 4+2$.

Kod zadataka sa složenijim izrazima nailazimo na produženu jednakost jer ne pišemo odmah rješenje, već zadatke rješavamo u više koraka. Pritom se učenici često pitaju kako je pravilno zapisivati jednakosti: u jednom retku ili u više redova? Pogledajmo dva zapisa:

- $3+4\cdot 5=3+20=23$
- $\begin{aligned} 3+4\cdot 5 &= 3+20 \\ &= 23 \end{aligned}$

Jedan te isti zadatak zapisan je na malo drukčije načine i svaki od tih načina je ispravan i može se koristiti. Možemo preporučiti da se jednostavniji zadatci zapisuju u jednom retku, a složeniji u više redaka (kao u drugom primjeru) kako bi učenik mogao bolje pratiti i povezati prethodni s tekućim retkom.

Jednadžba

Jednadžba se odnosi na jednakost dviju funkcija jedne ili više varijabli, oblika $f(x) = g(x)$. Ako je skup A područje definicije funkcije f, a skup B područje definicije funkcije g, riješiti gornju jednadžbu znači naći skup svih elemenata x presjeka $A \cap B$, takvih da je $f(x) = g(x)$. Takvi elementi x nazivaju se rješenjima jednadžbe (Hrvatska enciklopedija, 2019.).

Učenici rješavaju jednadžbe već od prvog razreda osnovne škole, primjerice, u zadatcima tipa $2+\_\_ = 3$. Pritom se koriste konkretnim materijalima i slikovnim prikazima. Tu za zornost puno pomažu modeli jednakosti poput nadopunjavanja u modelu duljine ili vage. Kasnije, kako učenici uče sve veće brojeve, jednadžbe (npr. $213+x=701$) rješavamo vezom pojedinih računskih operacija. U višim razredima osnovne škole i dubljim uranjanjem u algebru, jednadžbe rješavamo transformiranjem složenijih jednadžbi na jednostavnije ekvivalentne jednadžbe, tj. na takve koje imaju rješenja kao i polazne jednadžbe (tablica 1).

Vidljivi koraci transformacije	"Prebacivanje" na lijevu tj. desnu stranu
$-2+x=-3x+6 \;/+3x$	$-2+x=-3x+6$
$-2+x+3x=-3x+6+3x$	$x+3x=6+2$
$-2+x+3x=6 \;/+2$	$4x=8 \;/:4$
$-2+x+3x+2=6+2$	$x=2$
$x+3x=6+2$	
$4x=8 \;/:4$	
$\frac{4}{4}x=\frac{8}{4}$	
$x=2$	

Tablica 1.

Prilikom rješavanja jednadžbi nastaje metodički problem trebamo li ustrajati na lijevom prikazu iz tablice 1 ili desnom. U lijevom stupcu jasno su prikazani koraci transformacije početne jednadžbe. Ti se koraci u ovoj jednadžbi zasnivaju na svojstvima relacije jednakosti na brojevima: svojstvu zbrajanja i svojstvu dijeljenja (u nekim drugim jednadžbama također i svojstvima oduzimanja i množenja). Ideja za transformacije zasniva se na biranju inverza pojedinog člana izraza (bilo aditivnog, bilo multiplikativnog) kako bi se jednadžba transformirala u ekvivalentnu, ali jednostavniju za pronalazak rješenja.

U desnom stupcu tablice prikazan je skraćeni postupak onog iz lijevog stupca. Ako učenik upozna samo taj način, dobit će osjećaj da pojedini članovi izraza „putuju“ s jedne na drugu stranu jednakosti i pritom se pretvaraju u svoj inverz. Primjerice, kod aditivnog inverza učenici govore: “Broj -2 *prebacujem* na desnu stranu jednakosti i on postaje $+2$”. Kao i kod automatizacije mnogih drugih postupaka, važno je prvo dobro razumjeti lijevi postupak da bi se s razumijevanjem prešlo na ovaj desni, kojim se brže dolazi do rješenja jednadžbe.

Tipične pogreške

Kako smo ih dosad prikazali, jednakost i izraz se čine vrlo jednostavnima i lako shvatljivim pojmovima. Stoga se možemo pitati: U čemu je onda problem? Pogledajmo nekoliko tipičnih primjera iz prakse.

Primjer 1.

Dopuni:

$$3 + 4 = \_\_ + 1 = \_\_ + 2 = \_\_$$

Zadatak ovog tipa može se često naći u udžbenicima i zbirkama zadataka iz razredne nastave matematike. U zadatku nije ništa sporno jer na crte treba upisati brojeve tako da jednakosti budu točne:

$$3 + 4 = \underline{6} + 1 = \underline{5} + 2 = \underline{7}$$

Međutim, u radu sa studentima učiteljskog studija, kao i na stručnim predavanjima za učitelje razredne nastave, primjećujem da otprilike polovica sudionika zadatak rješava ovako:

$$3 + 4 = \underline{7} + 1 = \underline{8} + 2 = \underline{10}$$

Ova pogreška potiče na razmišljanje zašto se griješi u tolikoj mjeri. Ako učitelji i budući učitelji na ovaj način pristupaju rješenjima ovog zadatka, možemo pretpostaviti da i učenici griješe u rješavanju ovakvog tipa zadataka. Jedan razlog može ležati u nedovoljnom osvješćivanju da lijeva i desna strana jednakosti trebaju imati jednake vrijednosti, a drugi da se u nastavi prevelik naglasak stavlja samo na računanje. No, računske operacije nisu “otok sam za sebe”, one trebaju platformu na kojoj će se uzgajati. Važni dijelovi te platforme, uz brojeve, svakako su pojmovi jednakost i izraz.

Primjer 2.

Izračunaj:

a) $5 + (6 + 4) = 10 = 15$

U ovom primjeru vidimo zadatak u kojem treba izračunati vrijednost zadanog izraza te kako je jedan učenik riješio taj zadatak. Primijetimo da je krajnji rezultat točan, ali već prva jednakost nije istinita. No, možemo li zamisliti kako je učenik rješavao ovaj zadatak? Lako je odgonetnuti. Kod ovog učenika je “mozak brži od ruke”, rekli bismo kolokvijalno. On zna da prvo treba izračunati izraz u zagradi pa to i čini. No, prije zbroja 10 je zaboravio strpljivo prepisati prvi pribrojnik 5 i znak $+$, iako ih je imao u vidu u računanju jer je u glavi izračunao $5 + 10$ i dobio točan rezultat 15.

Možemo reći da ovaj učenik poznaje redoslijed računanja zadataka sa zagradama, ali pri zapisivanju ne misli dovoljno na jednakost, tj. da zapisani izraz na lijevoj strani jednakosti uvijek mora biti jednak izrazu na desnoj strani jednakosti. Ovaj zadatak ukazuje na potrebu većeg kritičkog promišljanja prema pojmu jednakosti u osnovnoj školi.

Primjer 3.

Riješi jednadžbu:

$12 + x = 28 \; -12$

$x = 16$

Evo još jednog primjera tipične učeničke pogreške. Ovoga puta radi se o rješavanju jednadžbi. Učenik je uočio da treba “poništiti” pribrojnik 12 na lijevoj strani jednakosti kako bi dobio vrijednost x. To je u mislima i učinio (ako je razumio što radi) jer je dobio točan rezultat. No, zapis nije dobar. Umjesto da od cijele jednakosti oduzme 12 (što označavamo većom kosom crtom), on je u postupku zapisao da je 12 oduzeo samo od izraza na desnoj strani. Učenicima bi svakako trebalo ukazati na ovakvu tipičnu pogrešku i problem koji se javlja u jednakosti u tom slučaju.

Primjer 4.

Riješi jednadžbu:

$x + 12 = 15 = 3$

U ovom je primjeru vidljivo da je učenik napamet pronašao rješenje zadane jednadžbe $x + 12 = 15$, ali je svojim zapisom pokazao da ne razlikuje pojmove jednakost, rješenje jednadžbe i izraz. Kao i ranije, i tu se vidi potreba za jačim naglašavanjem kritičkog promišljanja o ovim pojmovima u nastavi.

Primjer 5.

Riješi jednadžbu:

$2x + 5 = 3x - 8 = -x = -13 = 13$

Kao i u prethodnom primjeru, i ovdje je učenik krenuo rješavati jednadžbu kao da je zadan samo izraz na lijevoj strani jednakosti koji treba pojednostaviti ili izračunati tako da se kreće udesno dok ne dobije rezultat. Opet možemo vidjeti da je kod učenika prisutno poznavanje postupka kako se rješavaju jednadžbe i da su neki računi ispravno provedeni napamet. Ipak, zapis opet ukazuje na poistovjećivanje zadatka tipa "Riješi jednadžbu" sa zadatkom tipa "Pojednostavi izraz" ili "Izračunaj". Bilo bi vrlo korisno pred učenike staviti ovaj zadatak s takvim rješenjem i tražiti da učenici kažu svoje mišljenje i objasne što je neispravno u postupku.

Primjer 6.

Pojednostavi izraz:

$$\frac{a-6}{4-a^2} + \frac{2}{2a-a^2} =$$

Rješenje:

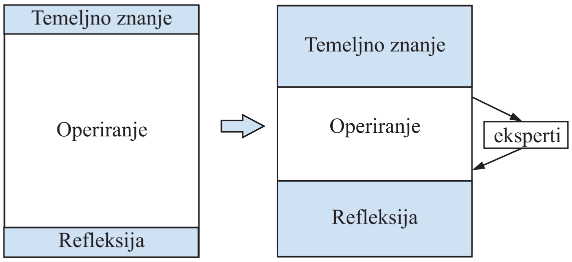
$$\frac{a-6}{4-a^2} + \frac{2}{2a-a^2} =$$
$$\frac{a-6}{(2-a)(2+a)} + \frac{2}{a(2-a)} = \quad / \cdot a(2-a)(2+a)$$
$$a(a-6) + 2(2+a) =$$
$$a^2 - 6a + 4 + 2a =$$
$$a^2 - 4a + 4$$

U ovom zadatku za 1. razred gimnazije imamo obrnut prikaz pogreške u rješavanju u odnosu primjere 4 i 5 (tamo su jednadžbe rješavane kao da treba pojednostaviti izraz). Naime, ovdje učenik treba pojednostaviti algebarski izraz, ali u drugom retku rješavanja on izraz rješava postupkom za jednadžbu, tj. "rješava se razlomka" množenjem sa zajedničkim nazivnikom obaju pribrojnika. Kako se u ovom zadatku ne radi o jednadžbi i njenim transformacijama, već o izrazu, naravno da izrazi u 2. i 3. retku postupka nisu jednaki. S obzirom na to da je ovo česta pogreška, jedan od jasnih ishoda osnovnoškolske matematike trebao bi biti razlikovanje pojmova rješavanja jednadžbi od pojednostavljivanja izraza. Iz postupka primjećujemo da je učenik prilično vješt u računanju sa samim algebarskim izrazima pa opet možemo pretpostaviti da je u njegovoj nastavi mnogo veći naglasak stavljen na operiranje nego na razumijevanje jednakosti.

Fischerov koncept

Prethodni prikazi učeničkih postupaka rješavanja jednadžbi i pojednostavljivanja izraza ukazuju na vječni problem nastave matematike o odnosu između konceptualnog i proceduralnog, razumijevanja i rutine, znanja i automatizacije. To je problematika o kojoj ćemo na svakom pojedinom školskom matematičkom sadržaju morati zastati i za svaki se pitati koliko duboko i dugo moramo ustrajati na osnovnom razumijevanju, a koliko na procedurama. Izgleda da se ne može ni bez jednog ni bez drugog i da nema jedinstvene *formule* ni omjera za sve sadržaje.

Austrijski metodičar matematike Roland Fischer bavio se ovom problematikom u sklopu svojeg promišljanja o općem obrazovanju i njegovim zadaćama. On primjećuje da se mnogi matematički sadržaji po cjelinama u školama rade tako da se prvo vrlo kratko uvedu osnovni pojmovi, zatim se najviše vremena provede operirajući (računanje, operiranje, konstruiranje itd.) da bi na kraju vrlo malo vremena bilo potrošeno na diskusije, osvrte, dublja promišljanja i refleksiju o problematici te cjeline. Ta je situacija prikazana na lijevoj strani slike 1.

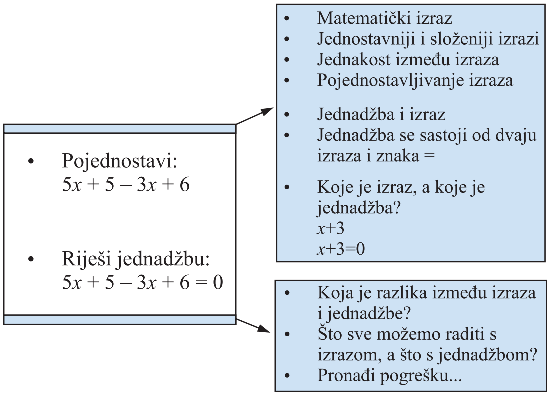


Slika 1. Fischerov koncept: komunikacija s ekspertima (Fischer, neobjavljeno)

Autor smatra da bi matematička edukacija trebala ići u smjeru koji je prikazan na desnoj strani slike 1, tj. da se, uz pretpostavku istog vremena i sadržaja na raspolaganju, zadatci posvećeni operiranju smanje, a da se da više prostora temeljnom znanju te refleksiji. To ne znači da operiranja više ne bi trebalo biti. Naprotiv, ono je također važno, ali uz današnju tehnologiju sve što je moguće i smisleno, trebalo bi prema Fischeru prenijeti na tzv. eksperte. To u matematici može biti kalkulator, računalni program, softver dinamične geometrije i sl. Komunikacija s ekspertima (tj. što učenik nalaže tim ekspertima, koja pitanja im postavlja i kako interpretira rezultate koje dobiva od njih) ključni je dio obrazovanja učenika u ovom modelu.

Pogledajmo sada kako bi po ovom modelu izgledalo obrazovanje vezano za problematiku jednakosti i izraza. Što se tiče pojednostavljivanja izraza i rješavanja jednadžbi, vjerojatno se možemo složiti da je najveći udio vremena i zadataka posvećen zadatcima operiranja, tj. savladavanja određenih tipova zadataka. No, kako povećati udio temeljnih znanja? Koja su to temeljna znanja? Pa svakako se u njih ubrajaju razlikovanje matematičkog izraza od jednakosti i jednadžbe te što znači pojednostaviti izraz, a što riješiti jednadžbu. Neki primjeri za temeljna znanja prikazani su na slici 2. Refleksija se može odnositi, primjerice, na interpretaciju tuđih pogrešaka prilikom rješavanja zadataka, dubljem promišljanju kada nam treba izraz, a kada jednadžba i sl.

A što je u ovom slučaju s ekspertima sa slike 1? Što/tko su eksperti u ovoj priči? Što se rješavanja aritmetičkih zadataka tiče, džepni kalkulatori su prisutni u nastavi već desetljećima, a za jednadžbe su se u međuvremenu pojavili mnogi digitalni "eksperti" poput WolframAlphe, Photomatha i sl. To znači da bi se rješavanje izraza i jednadžbi, pogotovo onih složenijih, više prebacilo na softver, dok bi postavljanje problema i promišljanje o rješenjima bio posao više namijenjen učeniku. No, vjerojatno najteži korak prema ostvarenju ovog modela leži u duboko ukorijenjenoj tradiciji operiranja kao glavnoj učeničkoj aktivnosti.



Slika 2. Primjer dodavanja Temeljnih znanja i Refleksije

Prijedlozi za realizaciju u razredu

Bez obzira na Fischerov ili neki drugi idealizirani model, zapitajmo se možemo li mi ipak u današnjoj nastavi, s današnjom satnicom, s konkretnim stvarnim učenicima i ishodima ipak pokušati mijenjati stvari nabolje. Primjeri od 1. do 6. iz ovog članka ukazuju da svakako treba ubaciti razumijevanje pojmova jer bez njih rješavanje jednadžbi kao ni pojednostavljivanje izraza nema smisla. Evo još nekoliko primjera zadataka koji potiču razumijevanje.

Zadatak 1. Prva mogućnost je da nastavnik učenicima pokaže primjere iz ovog teksta zajedno s pogrešnim načinima rješavanja i da pita učenike vide li pogrešku i gdje je. Već na taj način učenike stavlja u ulogu ocjenjivača tuđeg uratka, što osim poticanja razumijevanja pojmova može potaknuti i motivaciju. Osim toga, kroz takve zadatke učenik nije samo "rješavač zadataka", već mu se uloga mijenja u nekoga tko vrednuje tuđi rad i daje svoje mišljenje o njemu. O potencijalima korištenja pogrešaka u nastavi već je bilo riječi u MiŠ-u (Jukić Matić, 2019; Novački i Jukić Matić, 2020.).

$2+3=5$	$V=a\cdot b\cdot c$	$k=3$
$8=16:2$	$O=2B+P$	$a=b+2$
$4+3=11-4$		
$3x+6=2x+1$	$\frac{s}{t}=v$	$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
$o=18\pi$ cm		
$P=18\pi$ cm^2	$k=\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{o_1}{o_2}$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Tablica 2.

Zadatak 2. Učenik je u udžbeniku pročitao jednakost:

$$4+3=11-4$$

i komentirao: "Kako je $3=11$? Pa to nije točno!"

Je li učenik u pravu? Što ga je zbunilo? Da si ti učitelj/učiteljica, kako bi mu objasnio/objasnila?

Zadatak 3. Zadana je jednakost $a-b=b-a$. Za koje brojeve a i b vrijedi ova jednakost, a za koje ne vrijedi? Objasni.

Zadatak 4. Je li ova jednakost ispravna:

$$\frac{a^2-2a}{a-2}=a?$$

Za koje brojeve a ona vrijedi, a za koje ne vrijedi? Objasni.

Zadatak 5. Vježbanje korištenja riječi izraz (vidi tablicu 2). Učenici dobivaju različite primjere jednakosti iz područja aritmetike i algebre te proučavaju izraze u njima. Koriste termine jednočlani izraz, dvočlani izraz, složeni izraz itd.

Zatim može slijediti razgovor o tome čemu služe izrazi, zašto je pogodno izražavati se njima i zašto je bilo potrebno njihovo uvođenje. Kako bi izgledala svaka od ovih jednakosti koju ne bismo prikazali simbolima, već riječima?

Zaključak

Pojam jednakosti proteže se kroz cijelu matematičku obrazovnu vertikalu i smatra se jednim od temeljnih matematičkih pojmova. Ako se dobro ne usvoji, učenik može imati problema sa sljedećim matematičkim konceptima: brojevi, računske operacije, svojstva računskih operacija, matematički termini i znakovi, rješavanje jednadžbi ili nejednadžbi itd. Stoga je važno da nastavnik bude svjestan ove problematike, ali i da ima podršku u kurikulu i metodičkoj literaturi. U današnje vrijeme vrlo je korisna i lako dostupna *online* komunikacija među nastavnicima kroz koju mogu izmjenjivati svoje ideje (npr. o ovoj temi) i iskustva kako su nešto napravili u razredu i kako im je uspjelo. Kroz takvu komunikaciju smanjit će se mogućnosti da neke važne i temeljne stvari prođu "ispod radara", naprotiv, moći ćemo se na kvalitetan način uhvatiti u koštac s njima.

LITERATURA

1/ www.enciklopedija.hr

2/ I. Gusić (1995.): *Matematički rječnik*, Element, Zagreb.

3/ G. I. Gleizer (2003.): *Povijest matematike za školu*, Školske novine i Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb.

4/ F. M. Brueckler (2016.): Tko je prvi... uveo znakove =, < i >? *Matematika i škola 86*, 40. https://mis.element.hr/fajli/1493/86-12.pdf

5/ V. Horvat i D. Glasnović Gracin (2016.): Balansirajuća greda. *Matematika i škola 86*, 41–44. https://mis.element.hr/fajli/1494/86-13.pdf

6/ R. Fischer (neobjavljeno): Höhere Allgemeinbildung, Sveučilišna skripta, 15 str.

7/ Lj. Jukić Matić (2019.): Može li neuspjeh biti produktivan? *Matematika i škola 102*, 51–55.

8/ D. Novački i Lj. Jukić Matić (2020.): Formativno vrednovanje s pomoću kognitivnog konflikta. *Matematika i škola 104*, 147–153.