

Produktivno ponavljanje

Vinko Bajrović, Split

Sadržaj koji slijedi namijenjen je mlađim učiteljima i nastavnicima kojima bih želio prenijeti dio svojeg praktičnog iskustva u nastavi matematike.



U pripremi usvajanja nastavne teme, odnosno programskog sadržaja u vremenu trajanja jednog školskog sata, na fakultetu se obično stekne znanje (prijedlog) o organizaciji takvog nastavnog sata s uobičajenim etapama: uvod, usvajanje (obrada) novih sadržaja, vježbanje i ponavljanje, a na kraju zadavanje domaće zadaće. Štoviše, ponegdje se predlaže i vremensko dimenzioniranje rada: uvod do 5 minuta, usvajanje do 25 minuta, ponavljanje i vježbanje do 10 minuta i na kraju 5 minuta zadavanja domaće zadaće.

Kroz praksu sam “stvarao” osobne poglede na metodiku matematike i ostvarivanje metodičkih postupaka. Jedan od njih je “izopačenje” prethodno navedenog dimenzioniranja s naglaskom na uvod u trajanju i do 30 minuta. U tom vremenu se “radi postelja na koju će prileći novo gradivo”.

Bilo je to 70-ih godina kad je netko prenio dr. sc. Vladimiru Poljaku, velikom hrvatskom pedagogu i metodičaru, kako u splitskoj Osnovnoj školi “Ruđer Bošković”, vježbaonici Više pedagoške škole, jedan mladi nastavnik prakticira **produktivno ponavljanje** koje on upravo teorijski objašnjava s naglaskom na ponavljanje – **produkt ponavljanja je obrada novog programskog sadržaja – simboli-**

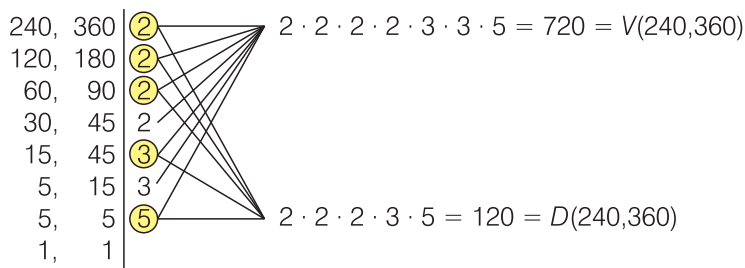
oza “starog” i “novog” nastavnog sadržaja, odnosno, povezivanje koje stvara podlogu za brže i kvalitetnije usvajanje novog.

Dr. sc. Vladimir Poljak došao je u Split u Osnovnu školu “Ruđer Bošković”, vježbaonicu Više pedagoške škole, gdje je prisustvovao mojoj nastavi. Izostavit ću dobivene komplimente, nakon čega smo nastavili sa suradnjom iz koje sam imao veliku korist: poimanje dijelova metodike matematike na drugi način.

Ovdje ću za primjer **produktivnog ponavljanja** prezentirati obradu najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja te njihovu primjenu.

Najmanji zajednički višekratnik (V) i najveći zajednički djelitelj (D) prirodnih brojeva

U usvajanju najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja treba razmisliti o tome koji sadržaji čine ranije spomenutu “postelju”.



Slika 1. Jedan postupak za nalaženje najmanjeg zajedničkog višekratnika i najvećeg zajedničkog djelitelja

Djelitelji i djeljivost:

1. Pojam djeljivosti prirodnih brojeva
(Svaki prirodni broj može se *podijeliti* svakim prirodnim brojem, ali svaki prirodni broj nije *djeljiv* sa svakim prirodnim brojem. Kada je neki prirodni broj *a* djeljiv prirodnim brojem *b*? Samo onda kada je broj *a* višekratnik broja *b*. Svaki prirodni broj djeljiv je s najmanje dva prirodna broja, sa samim sobom i s 1.)
2. Prosti i složeni prirodni brojevi
(Napisati prvih pedeset prirodnih brojeva i zaokružiti ih s pomoću dviju boja, jednom proste, drugom složene prirodne brojeve, pri čemu broj 1 nije prost ni složen prirodan broj.)
3. Članovi i faktori jednakosti
(Među članovima jednakosti su znakovi zbrajanja i oduzimanja, a među faktorima znakovi množenja i dijeljenja.)
4. Višekratnici prirodnog broja
(Svaki broj ima beskonačno mnogo višekratnika.)
5. Djelitelji prirodnog broja
(Prosti prirodni brojevi imaju samo dva djelitelja, a složeni prirodni brojevi više od dva.)
Pravila djeljivosti brojevima 2, 3 i 5.
6. Preoblikovanje (faktorizacija) prirodnog broja u umnožak prirodnih brojeva
(Rastavljanje prirodnih brojeva na proste faktore. Npr. $240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.)

Nakon ovih koraka možemo nastaviti s usvajanjem novih sadržaja: najmanji zajednički višekratnik i najveći zajednički djelitelj i njihove primjene.

Najmanji zajednički višekratnik i najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva

Napravi se usporedni rastav dvaju ili više prirodnih brojeva (slika 1).

Množenjem svih dobivenih prostih faktora $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ izračunava se najmanji zajednički višekratnik zadanih brojeva i zapisuje $V(240, 360) = 720$.

Množenjem *samo* onih prostih brojeva s kojima su bila djeljiva oba broja iz tablice (zaokruženo) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ izračunava se najveći zajednički djelitelj zadanih brojeva i zapisuje $D(240, 360) = 120$.

Primjena najmanjeg zajedničkog višekratnika

U nastavku slijedi popis najvažnijih primjena poznavanja najmanjeg zajedničkog višekratnika za osnovnu školu.

1. Uspoređivanje racionalnih brojeva (razlomaka) različitih nazivnika, pri čemu je vrlo važno znati proširivanje razlomaka, uz povezivanje sa svojstvom količnika.

Primjer: Koji je razlomak veći, $\frac{29}{240}$ ili $\frac{31}{360}$?

Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik, korištenje postupka za pronalaženje najmanjeg zajedničkog višekratnika i primjena proširivanja
 $\frac{57}{720} < \frac{62}{720}$.

2. Zbrajanje razlomaka različitih nazivnika.

Primjer: $\frac{29}{240} + \frac{31}{360} = \frac{57}{720} + \frac{62}{720} = \frac{119}{720}$.

3. Oduzimanje razlomaka različitih nazivnika.

Primjer: $\frac{29}{240} - \frac{31}{360} = \frac{57}{720} - \frac{62}{720} = -\frac{5}{720}$
 $= -\frac{1}{144}.$

4. Rješavanje jednadžbi u kojima se možemo osloboditi razlomaka.

Primjer: $\frac{x}{240} + \frac{x}{360} = 1 \quad / \cdot 720 \Rightarrow$
 $\frac{x}{240} \cdot 720 + \frac{x}{360} \cdot 720 = 1 \cdot 720$ (ne preskakati ovaj korak) $\Rightarrow 3x + 2x = 720 \dots$

Primjena najvećeg zajedničkog djelitelja prirodnih brojeva

Primjena poznavanja postupka traženja najvećeg zajedničkog djelitelja traži se u rješavanju ovih važnih tipova zadataka:

1. Skraćivanje razlomaka, pri čemu se brojnik i nazivnik dijele svojim najvećim zajedničkim djeliteljem.

Primjer: Skrati razlomak $\frac{240}{360}.$

Podijelit ćemo brojnik i nazivnik najvećim zajedničkim djeliteljem: $\frac{240 : 120}{360 : 120} = \frac{2}{3}.$

2. Izlučivanje najvećeg zajedničkog faktora.

Primjer: Izluči najveći zajednički faktor dvočlana izraza $240a + 360b.$

To je u ovom slučaju najveći zajednički djelitelj koeficijenata **240** i **360**, tj. riječ je o broju **120**.
 $240a + 360b = 120(2a + 3b).$

Pri **produktivnom ponavljanju** svakom od koraka prethode oni koraci ispred njega. Prednost ovog oblika rada je kvalitetnije ponavljanje i vježbanje, ali i praćenje i formativno vrednovanje rada aktivnih učenika (suradnika u radu). Posebno je važno poimanje zbog čega se nešto uči ("zakorači" prvi korak da možeš nastaviti s drugim).

Prije pandemije COVID-19 bolesti u jednoj sam osnovnoj školi održao nastavni nastavni sat u kojemu sam **produktivnim ponavljanjem** doživio da je na satu najaktivnije i najbolje reagirao učenik za kojega sam na kraju sata saznao od učitelja da je nezainteresiran, ne uči i da ima negativnu ocjenu iz matematike.

Zašto smo naglasili da se radi s "prirodnim brojevima"? Upravo zbog toga što će učenici u prvom razredu srednje škole još jednom računati najmanji zajednički višekratnik i najveći zajednički djelitelj, ali algebarskih izraza. (Prilika je to da se kaže učenicima što je aritmetika, a što algebra.) Pritom će biti nužno poznavati karakteristične rastave koje je dr. sc. Svetozar Kurepa u svojem udžbeniku za prvi razred srednje škole nazvao "Neke važne formule":

- kvadrat zbroja $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
- kvadrat razlike $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$
- razlika kvadrata $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- zbroj kubova $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- razlika kubova $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

Znatiželjni trebaju riješiti zadatke:

1. Izračunaj najmanji zajednički višekratnik algebarskih izraza $(a + b)$, $(a - b)$, $(a^3 + b^3)$.

2. Izračunaj najveći zajednički djelitelj algebarskih izraza $(a - b)$, $(a^3 - b^3)$, $(a^2 - b^2)$.

3. Izračunaj $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a^3+b^3}.$

4. Skrati razlomak $\frac{a^3 - b^3}{(a - b)(a^2 - b^2)}.$

5. Izlučivanjem zajedničkog faktora dvočlana izraza na lijevoj strani dokaži da je

$$(a-b)(a^3-b^3)-(-a^2-b^2)^2=-ab(a-b)^2.$$

LITERATURA

- 1/ S. Kurepa (1988.): *Matematika 1 za prvi razred srednjeg usmjerenog obrazovanja*, Školska knjiga, Zagreb.
- 2/ V. Poljak (1965.): *Sistematiziranje nastavnih sadržaja*, Pedagoško-književni zbor, Zagreb.
- 3/ V. Poljak (1967.): *Dinamičnost nastave*, Školska knjiga, Zagreb.
- 4/ V. Poljak (1987.): *Nastavni sistemi*, Školska knjiga, Zagreb.
- 5/ V. Poljak (1989.): *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb.