

POJAM JE POJAM,  
AL' JA O POJMU  
NEMAM POJMA!



# Matematički pojam

Zdravko Kurnik, Zagreb

Jedno od načela svake nastave je načelo trajnosti znanja, vještina i navika. Kako postići trajnost matematičkih znanja? Taj cilj može se ostvariti samo uz usmjereni razvoj mišljenja. Na taj način razvoj mišljenja učenika postaje jedan od glavnih zadataka suvremene nastave matematike, posebno stvaralačkog mišljenja kao najviše razine. Tri su osnovna oblika mišljenja: *poimanje*, *sudjenje* i *zaključivanje*. Kao rezultat tih oblika dobivaju se *pojmovi*, *sudovi* i *logički sudovi*.

Pogledajmo nekoliko primjera za svaki od ovih oblika.

## Primjer 1.

- 1) Pravac koji prolazi polovištem dužine i okomit je na tu dužinu zove se *simetrala dužine*.

Jednadžba oblika  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdje su  $a, b, c$  realni brojevi i pri tome  $a \neq 0$ , naziva se *algebarska jednadžba drugog stupnja* ili *kvadratna jednadžba*.

- 2) Točkom izvan danog pravca može se povući jedinstven pravac paralelan s tim pravcem.

Za svaki prost broj  $p$  veći od 3 broj  $p^2 - 1$  djeljiv je sa 24.

- 3) Ako je  $a \leq b$  i  $b \leq c$ , onda je  $a \leq c$ .  
Ako je  $a \in A$  i  $A \subset B$ , onda je  $a \in B$ .

U 1) su pomoću definicija opisana dva matematička pojma, simetrala dužine i kvadratna jednadžba. U 2) imamo dva matematička suda. Prvi je očito aksiom o paralelama u euklidskoj geometriji ravnine, a drugi poučak u algebri. U 3) imamo dva logička suda: iz dva elementarna suda dobiven je treći sud. Prvi je svojstvo tranzitivnosti relacije  $\leq$ , a drugi je svojstvo inkluzije.

\* \* \*

Oblici mišljenja igraju veliku ulogu u matematičkim teorijama. To je vidljivo i iz sljedećeg najkraćeg prikaza izgradnje neke matematičke teorije u četiri etape:

- A) Navođenje osnovnih pojmova.
- B) Formuliranje aksioma.
- C) Uvođenje novih pojmova.
- D) Izvođenje i dokazivanje teorema.

Drugim riječima možemo reći da je neko znanstveno matematičko područje tvorevina aksioma, osnovnih pojmova, izvedenih pojmova i teorema.

Budući da matematika kao znanost i matematika kao nastavni predmet trebaju biti u uskoj vezi, a na to ukazuje i drugo načelo nastave, načelo znanstvenosti, to postaje jasno da je proučavanje navedenih oblika mišljenja i njihovo pravilno izražavanje kod učenika u nastavnom procesu vrlo važno i zahtijeva od nastavnika matematike primjerenu pripremljenost za njihovu obradu. O teoremima i njihovim dokazima više riječi bilo je u [3] i [4]. Predmet razmatranja ovog članka su **matematički pojmovi**.

---

## Što je pojam?

Objekti ili relacije razlikuju se međusobno svojim svojstvima, osobitostima, obilježjima. Od svih svojstava nekog objekta ili odnosa posebno su važna bitna svojstva, svojstva koja su njegova osobitost i kojima se on izdvaja iz skupa drugih objekata. Na primjer, “djeljivost samo sa 1 i sa samim sobom” osobitost je prostih brojeva u skupu prirodnih brojeva  $\mathbf{N}$ , “jednakost duljina svih stranica” osobitost je kvadrata u skupu pravokutnika, “raspolavljanje dijagonala” osobitost je paralelograma u skupu četverokuta, “osnovka je paralelogram” osobitost je paralelepipeda u skupu prizama, “jednakost konjugirano kompleksnih brojeva” osobitost je realnih brojeva u skupu kompleksnih brojeva  $\mathbf{C}$  i dr.

**Pojam** je oblik mišljenja u kojem se odražavaju bitna svojstva objekata koji se proučavaju.

Jedna od značajki pojma kao oblika mišljenja jest to što je formiranje pojma u spoznaji čovjeka neodvojivo od njegovog izražavanja riječima, zapisom ili simbolom. Ova značajka posebno dolazi do izražaja u matematici.

Proces formiranja nekoga pojma je postupan proces. Možemo ga u grubim crtama opisati ovako: Početni i najjednostavniji stupanj spoznavanja pojma je promatranje i upoznavanje konkretnih objekata i njihovih konkretnih svojstava povezanih s pojmom i osjetilna spoznaja — **zapažanje**. Drugi stupanj je uočavanje nečeg općeg i zajedničkog elementima u promatranom skupu objekata — **predodžba o pojmu**. Treći stupanj je izdvajanje bitnog općeg svojstva takvih objekata — **formiranje i usvajanje pojma**.

U opisanom procesu nije teško prepoznati nekoliko značajnih znanstvenih postupaka: analizu, sintezu, apstrahiranje i poopćavanje. To znači da bilo koji pojmovi, a među njima i matematički, nakon pažljive analize nastaju apstrahiranjem svojstava predmeta koji stvarno postoje u prirodi i poopćavanjem (v. [1] i [2]). Na taj način matematički pojmovi, iako *apstraktni pojmovi*, ipak odražavaju neke strane stvarnog svijeta i samim tim pridonose njegovom spoznavanju.

Recimo nekoliko riječi i o riječi kao nosiocu pojma. Nužan zahtjev koji trebaju zadovoljavati simbolika i riječ pri izražavanju danog pojma jest **jednoznačnost**.

Riječ koja označava strogo definirani pojam nekog znanstvenog područja naziva se *znanstveni termin*. Primjeri termina: *kosina, sol, glagol, osmoza, polje, funkcija, elipsa* i dr.

Ponekad imamo više termina koji jednoznačno izražavaju jedan te isti termin. To ukazuje na bogatstvo jezika, ali i daje jasnije i točnije određenje samog pojma.

### Primjer 2. Sinonimi.

- 1) Termini za najjednostavniji četverokut: *Kvadrat, pravilni četverokut, romb s pravim kutom.*
- 2) Dužina s istaknutom početnom i krajnjom točkom: *Usmjerena dužina, vektor.*

- 3) Termini za funkcije  $f(x) = ax + b$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ( $a \neq 0$ ):  
*Linearna funkcija, polinom prvog stupnja.*  
*Kvadratna funkcija, polinom drugog stupnja.*
- 4) Termini za osnovnu funkciju na skupu poligona:  
*Površina, ploština.*

\* \* \*

Ponekad se odstupa od gornjeg zahtjeva jednoznačnosti, pa se jedna te ista riječ rabi za izražavanje više pojmova. To može dovesti do nejasnoće i nerazumijevanja, a posebno je nepoželjno u nastavi, gdje učenici tek usvajaju programom propisani sustav pojmova.

### Primjer 3. Korižen i $AB$ .

- 1) Termin *korižen* se shvaća na različite načine:  
*korižen iz broja, korižen jednadžbe, korižen biljke, korižen zuba, korižen živca.*  
 Dvoznačnost u nastavi matematike treba se izbjeći dosljednom zamjenom slabog termina *korižen jednadžbe* zaista primjerenim terminom *rješenje jednadžbe*.
- 2) Simbol  $AB$  često označava ove objekte:  
 $AB$  — pravac točkama  $A$  i  $B$ ,  $AB$  — dužina s krajevima  $A$  i  $B$ ,  $AB$  — udaljenost točaka  $A$  i  $B$ .  
 Ova višeznačnost eliminira se dosljednom uporabom za te objekte primjerenih različitih simbola  $AB$ ,  $\overline{AB}$ ,  $|AB|$ .

*Opseg pojma* je skup svih pojedinačnih objekata ili relacija na koji se može primijeniti jezični izraz pojma. Označava se sa  $O_P$ .

Opseg pojma razotkriva se pomoću *klasifikacije*.

**Primjer 4.** Pojam  $P$ , sadržaj  $S_P$ , opseg  $O_P$ .

- 1)  $P$ : *paralelni pravci.*

$S_P$ : leže u istoj ravnini, jednako su udaljeni jedan od drugog, nemaju zajedničkih točaka ili se podudaraju i dr.

$O_P$ : svi parovi paralelnih pravaca čije jasno određenje proizlazi iz sadržaja pojma.

- 2)  $P$ : *paralelogram.*

$S_P$ : nasuprotne stranice su paralelne, nasuprotne stranice su sukladne, nasuprotni kutovi su sukladni, kutovi uz istu stranicu su suplementni, dijagonale se raspolavljaju i dr.

$O_P$ : romboidi, rombi, pravokutnici, kvadrati.

- 3)  $P$ : *krivulja drugog reda.*

$S_P$ : ravninska krivulja, pravac siječe krivulju u najviše dvije točke, iz točke mogu se povući na krivulju najviše dvije tangente, krivulja se analitički predočuje jednadžbom drugog stupnja s dvije nepoznanice i dr.

$O_P$ : kružnice, elipse, parabole, hiperbole.

- 4)  $P$ : *površina mnogokuta.*

$S_P$ : nenegativna funkcija, aditivna funkcija, sukladnim mnogokutima pridružuje isti broj, bar jednom kvadratu pridružuje broj 1 i dr.

$O_P$ : površina trokuta, površina četverokuta, . . . , površina  $n$ -terokuta.

- 5)  $P$ : *relacija ekvivalencije.*

Relacija ekvivalencije  $\rho$  na skupu  $S$  je važan matematički pojam. Susrećemo ga u raznim područjima matematike, pa je opseg toga pojma dosta širok. Navest

## Opseg i sadržaj pojma

Svaki pojam  $P$  ima svoj sadržaj i opseg.

*Sadržaj pojma* je skup svih bitnih obilježja koja imaju svi objekti ili relacije iz opsega pojma. Označava se sa  $S_P$ .

ćemo neke njegove elemente koji su poznati i u školskoj matematici.

$S_P$ : refleksivnost ( $a \rho a$ , za svaki  $a$  iz  $S$ ), simetričnost ( $a \rho b \implies b \rho a$ , za sve  $a$  i  $b$  iz  $S$ ), tranzitivnost ( $a \rho b \wedge b \rho c \implies a \rho c$ , za sve  $a, b, c$  iz  $S$ ).

$O_P$ : jednakost skupova, jednakost brojeva, jednakost vektora, sukladnost figura, sličnost figura, paralelnost pravaca, paralelnost ravnina i dr.

\* \* \*

Sadržaj pojma potpuno određuje njegov opseg i obrnuto, opseg pojma potpuno određuje njegov sadržaj. Ako se mijenja sadržaj, mijenja se i opseg. Nije teško vidjeti da tu postoji obrnuta zavisnost (što je bogatiji sadržaj, to je manje objekata koji imaju sva ta svojstva i obrnuto).

Pomoću opsega pojma možemo sada uvesti pojmove *rod* i *vrsta*, koji su posebno važni prilikom definiranja pojma.

Ako je opseg  $O_{P_1}$  pojma  $P_1$  sadržan u opsegu  $O_{P_2}$  pojma  $P_2$ , onda se kaže da je pojam  $P_2$  *rod* u odnosu na pojam  $P_1$ , a pojam  $P_1$  *vrsta* u odnosu na pojam  $P_2$ .

#### Primjer 5. Rodovi i vrste.

- 1) Za pojam *srednjica trokuta* rodovi su *dužina* i *skup točaka pravca*.
- 2) Pojmovi *pravokutnik* i *romb* imaju iste rodove. To su: *paralelogram*, *trapez*, *četverokut*, *mnogokut* i *skup točaka ravnine*.
- 3) Za pojam *kvadrat* rodovi su *pravokutnik*, *romb*, *paralelogram*, *trapez*, *četverokut*, *mnogokut* i *skup točaka ravnine*.
- 4) Za pojam *paralelepiped* rodovi su *četverostrana prizma*, *prizma*, *poliedar* i *skup točaka prostora*.
- 5) Za pojam *prirodan broj* rodovi su *cijeli nenegativan broj*, *cijeli broj*, *racionalan broj*, *realan broj* i *kompleksan broj*.

## Definicija pojma

Dvije su vrste matematičkih pojmova. Prva vrsta su jednostavni pojmovi koji se ne definiraju i koji se nazivaju *osnovni pojmovi*. Takvi su pojmovi: *točka*, *pravac*, *ravnina*, *prostor*, *skup*. Druga vrsta su *izvedeni pojmovi*, pojmovi koji se jasno i precizno definiraju, što znači da se njihovo značenje opisuje pomoću osnovnih pojmova ili pomoću nekih ranije definiranih pojmova.

Jasno je da u definiciji pojma važnu ulogu igraju bitna obilježja pojma. Pri tome, svako obilježje koje ulazi u definiciju pojma mora biti nužno, a sva zajedno dovoljna za uvođenje toga pojma. U definiciji pojma treba otkrivati osnovni sadržaj pojma. Ne smije biti suvišnih riječi. Ne smije biti nedostataka, koji bi mogli izazvati nedoumicu ili nerazumijevanje pojma. To je zahtjev *minimalnosti sadržaja*. Osim ovog zahtjeva postavljaju još tri zahtjeva koja treba zadovoljavati definicija: *prirodnost*, *prikladnost* i *primjenjivost*. I pored svega preostaje ipak određeni stupanj slobode definiranja pojmova.

Često se neki pojam može definirati na više načina. Važno je odmah naglasiti da sve definicije istog pojma moraju biti međusobno ekvivalentne, što znači da je opseg pojma po svakoj od tih definicija isti skup objekata. Možemo reći i ovako: ako odaberemo jednu od njih kao "radnu" definiciju pojma, onda njoj ekvivalentne definicije pojma poprimaju značenje poučaka koji su njezine posljedice.

Sažeto, definicija pojma daje se opisati ovako:

**Definicija pojma** je nabranje nužnih i dovoljnih obilježja pojma povezanih logičkom rečenicom ili simboličkim zapisom.

Matematički pojmovi mogu se definirati na razne načine. Evo osnovnih načina:

## 1. Pomoću najbližeg roda i razlike vrste.

Ovaj način definiranja vrlo je čest u geometriji. Od svih rodova pojma izdvoji se onaj koji mu je najbliži i njegovom sadržaju pridoda jedno bitno obilježje koje pripada samo vrsti koja se definira, tzv. razlika vrste. Za ilustraciju definirajmo na taj način srednjicu trokuta, pravokutnik, romb, kvadrat i paralelepiped, čije smo rodove promatrali u primjeru 5.

### Primjer 6.

- 1) Najbliži rod srednjice trokuta je “dužina”, a razlika vrste je bitno svojstvo “krajnje točke su polovišta dviju stranica trokuta”. Definicija:  
Dužina kojoj su krajnje točke polovišta dviju stranica trokuta naziva se *srednjica trokuta*.
- 2) Najbliži rod pravokutnika je “paralelogram”, a razlika vrste je bitno svojstvo “jedan unutarnji kut je pravi”. Definicija:  
Paralelogram kojemu je jedan unutarnji kut pravi kut naziva se *pravokutnik*.
- 3) Najbliži rod romba je “paralelogram”, a razlika vrste je ili bitno svojstvo “susjedne stranice imaju jednake duljine” ili “dijagonale su okomite”. Prema tome, romb možemo definirati na sljedeća dva načina:  
Paralelogram kojemu susjedne stranice imaju jednake duljine zove se *romb*.  
*Romb* je paralelogram kojemu su dijagonale okomite.
- 4) Kvadrat ima dva najbliža roda. U prvom slučaju najbliži rod mu je “pravokutnik”, a razlika vrste bitno svojstvo “susjedne stranice imaju jednake duljine” ili “dijagonale su okomite”. U drugom slučaju najbliži rod mu je “romb”, a razlika vrste bitno svojstvo “jedan unutarnji kut je pravi”. Prema tome, kvadrat možemo definirati na sljedeća tri načina:  
Pravokutnik kojemu susjedne stranice

imaju jednake duljine naziva se *kvadrat*.  
Pravokutnik kojemu su dijagonale okomite zove se *kvadrat*.

*Kvadrat* je romb s pravim kutom.

- 5) Najbliži rod paralelepipeda je “četverostrana prizma”, a razlika vrste bitno svojstvo “osnovka je paralelogram”. Definicija:  
*Paralelepiped* je četverostrana prizma kojoj je osnovka paralelogram.

## 2. Pomoću nabiranja bitnih obilježja pojma.

Bitno obilježje svakog pojma koji se dolje definira lako se uočava.

### Primjer 7.

- 1) Paralelne ravnine.  
Dvije ravnine zovemo *paralelnim* ako one nemaju zajedničkih točaka.
- 2) Sfera.  
Skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke prostora naziva se *sfera*.
- 3) Ekvivalentni skupovi.  
Kažemo da je skup  $E$  *ekvivalentan* skupu  $F$  i pišemo  $E \approx F$  ako postoji bar jedna bijekcija  $f$  sa  $E$  na  $F$ .

## 3. Induktivna definicija.

Karakteristika definicije lako se otkriva iz sljedećeg primjera.

### Primjer 8.

- 1) Niz kojemu je svaki član jednak zbroju prethodnog člana i konstante naziva se *aritmetički niz* ( $a_n = a_{n-1} + d$ ).
- 2) Niz kojemu je svaki član jednak umnošku prethodnog člana i konstante naziva se *geometrijski niz* ( $a_n = a_{n-1}q$ ).

## 4. Genetička definicija.

Ova definicija opisuje način postanka objekta koji se definira. Genetičke definicije

i nisu u pravom smislu matematičke definicije. U nastavi su korisne u onim slučajevima kada učenici nemaju dovoljno predznanja za usvajanje matematičkih definicija.

### Primjer 9.

- 1) *Crta* je trag točke koja se giba.
- 2) Dio ravnine koji opiše polupravac vrtanjem oko svoje početne točke naziva se *kut*.
- 3) Osim već prije navedene prirodne definicije sfere, moguća je i ovakva definicija: Ploha koja nastaje vrtanjem kružnice oko jednog njezinog promjera naziva se *sfera*.  
Zanimljiva je povijesna činjenica da je upravo tu definiciju sfere primjenjivao Arhimed pri određivanju oplošja i obujma kugle.
- 4) Tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice naziva se *valjak*.

## 5. Konvencionalna definicija.

Često se u pomanjkanju boljeg načina ili zbog drugih razloga uvodi definicija u kojoj se dogovorom određuje značenje nekog pojma ili simbola.

### Primjer 10.

- 1) Skup bez ijednog elementa naziva se *prazan skup*.
- 2) Smisao vrtnje u ravnini koji je suprotan obilasku kazaljke na satu zove se *pozitivni smisao vrtnje*.
- 3)  $a^0 = 1, 0! = 1$ .

\* \* \*

Kao što je ranije rečeno, da bi se značenje nekog pojma što jasnije i preciznije opisalo, definicija pojma treba zadovoljavati određene zahtjeve. Postavljamo ih u obliku pravila.

### Pravila:

1. Definicija mora biti primjerena definiranom pojmu, ni preuska, ni preširoka, mora razotkrivati bit pojma.
2. Definicija treba biti pregledna i sažeta.
3. Definicija mora biti suvremena.
4. Definicija ne smije biti izražena slikovitim ili na neki drugi način dvosmislenim jezikom.
5. Definicija ne smije biti cirkularna.
6. Definicija ne smije biti negativna, ako može biti pozitivna.
7. Opseg pojma koji se definira ne smije biti prazan skup.

Pogledajmo nekoliko definicija od kojih svaka nije u skladu s nekim od navedenih pravila. Neke od njih mogu se naći u udžbenicima.

### Primjer 11.

- 1) Paralelni pravci.  
Za dva pravca kažemo da su *paralelni pravci* ako se oni ne sijeku ili se podudaraju.  
Definicija je preširoka, izostavljeno je bitno obilježje “leže u ravnini”. Opsegu pojma zato pripadaju i mimoilazni pravci.
- 2) Paralelogram.  
*Paralelogram* je četverokut koji ima dva para međusobno paralelnih stranica jednakih duljina.  
U definiciji pojma nalaze se dva njegova bitna obilježja: “nasuprotne stranice su paralelne” i “nasuprotne stranice su jednakih duljina”. Međutim, obilježja su ekvivalentna, pa je svako od ovih dovoljno za određenje paralelograma. Zato u definiciju treba ući samo prvo obilježje, što je posve primjereno terminu *paralelogram*, a drugo izostaviti i odvojeno dokazati kao poučak.
- 3) Okomiti pravci i pravi kut.  
Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju se *okomiti pravci*.

Kut čiji su kraci međusobno okomiti naziva se *pravi kut*.

Ovo je primjer cirkularne definicije: okomiti pravci definiraju se pomoću pravog kuta, a pravi kut pomoću okomitih pravaca. Na taj način ni jedan pojam nije definiran. To je cirkulus — krug.

Okomiti pravci se zaista definiraju na gornji način, ali se tada pravi kut mora definirati pomoću susjednog kuta:

Kut koji je jednak svome susjednom kutu naziva se *pravi kut*.

4) Dužina i pravac.

*Dužina* je skup svih točaka pravca koje leže između dvije njegove točke.

*Pravac* nastaje produljivanjem dužine.

Uz pretpostavku da se poznaje relacija “ležati između”, prva definicija je ispravna. Druga definicija je cirkularna. No, pravac se ionako ne definira.

5) Trapez. Na pitanje koji se lik zove trapez, učenici često odgovaraju:

Trapez ima jedan par paralelnih stranica. Ova definicija nije ispravna, ima nedostatak. Izostavljen je rod “četverokut”. Ima mnogo likova koji imaju jedan par paralelnih stranica a nisu trapezi.

6) Iracionalan broj.

Realan broj koji nije racionalan naziva se *iracionalan broj*.

Ovo je negativna definicija iracionalnog broja. Ona ništa ne kaže o sadržaju toga pojma, već samo što on nije. Prihvatljivija je definicija:

Realan broj koji se zapisuje u obliku beskonačnog neperiodičkog decimalnog razlomka naziva se *iracionalan broj*.

7) Dvopravokutni trokut.

Trokut koji ima dva prava kuta naziva se *dvopravokutni trokut*.

Opseg ovog pojma u euklidskoj geometriji je prazan skup: takav trokut ne postoji. Međutim, definicija nije posve besmislena. U sfernoj geometriji takav trokut postoji!

Ovaj odjeljak završit ćemo jednim neobičnim primjerom.

**Primjer 12.** Definicije u rječnicima, priručnicima i enciklopedijama.

Sadržaj primjera popunjava čitatelj!

---

---

## Metodičke napomene

1) Proces formiranja pojmova u nastavi matematike ne mora, a vrlo često i ne može biti precizan i strog kao isti proces u znanosti. Sve ovisi o uzrastu i predznanju učenika. Dopušten je stanoviti stupanj slobode i pojednostavnjenja. Međutim, neki pojam u nastavnom procesu mora biti odabran, uveden i njegovo značenje opisano tako, da ga učenici razumiju, usvajaju, mogu prepoznati i razlikovati od drugih pojmova, te znaju primijeniti. Pri tome se pretpostavlja da je učenicima poznato značenje svih pojmova koji ulaze u definiciju novog pojma, što nastavnik provjerava tijekom definiranja. Dakle, mora se postići **jasnoća matematičkih pojmova**. Sva pojednostavnjenja ne smiju narušiti načelo znanstvenosti.

2) Svaki nastavnik matematike želi da mu nastava bude uspješna. Međutim, to ne ovisi samo o nastavniku. Tu su još učenici, sa svojim predznanjima, matematičkim sposobnostima i načinima mišljenja. Jedan od preduvjeta za uspješnost nastave je **poznavanje razine mišljenja** svakog učenika. Kada to zna, nastavnik može odabrati primjeren način izlaganja. Ako nastavnik ne obraća dovoljno pozornosti na razine mišljenja učenika već o nekom pitanju rasuđuje na jednoj razini mišljenja, a učenici na drugoj, nižoj razini, učenici neće razumjeti nastavnika. Mnogi neuspjesi nastave matematike mogu se pripisati upravo toj činjenici.

Pri obradi matematičkih pojmova imamo također više razina mišljenja. Na najnižoj razini učenik razlikuje, na primjer, geometrijske likove isključivo po obliku. Za njega su romb, trapez, pravokutnik tri različita lika, suprotavlja ih jedan drugom, usvaja njihove nazive, upoznaje za svaki pojedinačni lik po neko svojstvo, raspoznaje ih, ali još ne vidi neku užu vezu među njima. Takvo mišljenje učenik ima sve do sljedeće razine, uvođenja definicija likova. Definicijama tih pojmova završava proces njihovog formiranja i otkriva se da su zapravo svi promatrani likovi trapezi. Dakle, definiranjem pojmova razina mišljenja učenika se povisuje. Kritično mjesto obrade očito je **prijelaz** s prve razine na drugu. Uspješan završetak procesa zavisi o umješnosti nastavnika.

3) Na prvi pogled može se učiniti da je zahtjev minimalnosti sadržaja u definiciji suviše strog, pa čak i onda kad ga se u nastavi može lako ispuniti. To nije tako. Zahtjev ima svoje metodičko opravdanje. Definicije s mnogo suvišnog opterećuju s jedne strane pamćenje učenika, a s druge strane unose zbrku pri razlikovanju definicija i poučaka. Za ilustraciju pogledajmo sljedeće dvije definicije paralelograma iz udžbenika:

*Paralelogram* je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne.

*Paralelogram* je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i sukladne, nasuprotni kutovi sukladni, a kutovi uz istu stranicu suplementni.

Prva definicija je korektna. Kratka je, jasna i lako se pamti. U skladu je s terminom *paralelogram*. Od učenika se može zahtijevati da je pamte baš u tom obliku. Druga definicija nije dobra, ima mnogo suvišnih riječi i pojmova i teško da će je svi učenici znati izreći. Ona je zapravo sastavljena od prve definicije i tri poučka, koji se dokazuju primjenom sukladnosti trokuta, što je za taj uzrast učenika (šesti razred) vrlo primjeren susret s dokazom.

Jasno razlikovanje onih obilježja pojma koja su za njegovu definiciju nužna i dovoljna i onih koja se nakon toga mogu dokazati doprinosi razvoju **kritičkog mišljenja** učenika i vrijedan je rezultat uspješne obrade matematičkih pojmova.

4) Definicije s riječcom “je” ili “su” nisu najpreciznije jer se ponekad ne vidi radi li se doista o definiciji, ili rečenica predstavlja tvrdnju kojom se izriče neko svojstvo već ranije definiranog pojma. Takva je na primjer rečenica

“*Simetrala dužine* je skup svih onih točaka ravnine što su jednako udaljene od krajnjih točaka dužine”.

Ona može biti definicija simetrale dužine, ali kako se u nastavi rabi uobičajena definicija simetrale dužine navedena pod 1) u primjeru 1., to je navedeni iskaz poučak koji se treba dokazati.

Navedene dileme nema ako se u rečenici pojavljuju riječce “naziva se”, “zove se” ili “kažemo”. Tada se radi o definiciji.

5) U ovom prikazu matematičkih pojmova neka pitanja vezana uz njih nisu obrađena u punoj mjeri (proces formiranja, termini, simboli, metodika uvođenja). Zbog važnosti tih pitanja za primjerenu obradu matematičkih pojmova u nastavi matematike, njihova detaljnija razrada bit će dana u časopisu *Matematika i škola* broj 12.

\* \* \*

**Pitanje za kraj:** Zadovoljava li postupak definiranja pojmova u našim udžbenicima matematike?

Odgovor je uglavnom niječan. Postoji velika šarolikost. U nekim udžbenicima često se pojmovi uvode površno, neprecizno, stručno i metodički slabo. Čitatelj to može i sam lako uočiti uspoređivanjem definicija i pravila koja bi trebala zadovoljavati svaka definicija.

Ovaj članak je djelomično i potaknut pregledom opisa matematičkih pojmova u ra-



znim izvorima znanja (udžbenici, enciklopedije, priručnici, rječnici) a treba ga shvatiti i kao prilog raspravi o tom pitanju.

### Literatura

- [1] Z. Kurnik, *Generalizacija*, Matematika i škola 4 (2000), 147–154.
- [2] Z. Kurnik, *Apstrakcija*, Matematika i škola 6 (2000), 11–15.
- [3] Z. Kurnik, *Poučak ili teorem*, Matematika i škola 8 (2001), 101–105.
- [4] Z. Kurnik, *Dokaz*, Matematika i škola 9 (2001), 149–155.
- [5] V. A. Oganjesjan i dr., *Metodika predavanja matematika v srednej škole*, Prosveščenie, Moskva 1980.
- [6] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prijevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb 1956.
- [7] A. A. Stoljar, *Pedagogika matematiki*, Vyšejšaja škola, Minsk 1969.
- [8] Z. Šporer, *O definicijama u matematici*, Matematika 1 (1987), 5–11.
- [9] R. Živković, *Uvođenje novih matematičkih pojmova u nastavi*, Matematika 2 (1986), 5–13.
- [10] M. Žužić, *O obradi nekih pojmova u nastavi matematike*, Matematika 3 (1984), 29–36.

## METODIČKA RADIONICA

### DEFINICIJA

(Objekt, opseg, sadržaj, motivacija, definicija, alternativne definicije, termin, simbol)

APSOLUTNA VRIJEDNOST  
BIJEKCIJA  
EKVIVALENCIJA  
FUNKCIJA  
GRAF FUNKCIJE  
IMPLIKACIJA  
KOMPLEKSAN BROJ  
KONVEKSAN SKUP  
KORIJEN  
KORJENOVANJE  
LINEARNA FUNKCIJA  
LINEARNA JEDNADŽBA  
LOGARITAM  
LOGARITAMSKA FUNKCIJA  
POLINOM  
PROPORCIONALNE VELIČINE  
POSTOTAK  
POTENCIJA  
RACIONALNA FUNKCIJA  
RELACIJA EKVIVALENCIJE  
RJEŠENJE

BROJEVNI PRAVAC  
CENTRALNA SIMETRIJA  
ELIPSA  
HIPERBOLA  
HOMOTETIJA  
IZOMETRIJA  
KOŠA PROJEKCIJA  
KRUŽNICA  
KUGLA  
KUT  
KVADAR  
OKOMICA  
OKOMITI PRAVCI  
MIMOILAZNI PRAVCI  
ORTOCENTAR  
PIRAMIDA  
PRAVI KUT  
POVRŠINA  
SLIČNOST  
STOŽAC  
TANGENTA  
TETIVA  
TEŽIŠNICA  
TRANSLACIJA  
TRAPEZ  
VALJAK  
VEKTOR  
VISINA  
VOLUMEN

(Predstavljanje rješenja na folijama)