Metodika uvođenja novih pojmova

Zdravko Kurnik, Zagreb

Proučavanje oblika mišljenja i njihovo pravilno ispoljavanje kod učenika igra važnu ulogu u nastavnom procesu. U prošlom broju časopisa "Matematika i škola" u članku [2] opisan je poseban oblik mišljenja — **pojam**. U prikazu matematičkih pojmova neka pitanja vezana uz njih nisu obrađena u punoj mjeri. Posebno se to odnosi na proces formiranja pojmova i metodiku njihova uvođenja. Zbog važnosti tih pitanja za razvoj mišljenja učenika, ovdje će njihova obrada biti nešto detaljnija.

Podsjetimo se da je proces formiranja nekog pojma postupan proces i da ima tri stupnja:

I. **Promatranje i opažanje.** To je početni i najjednostavniji stupanj spoznavanja pojma. Promatraju se konkretni objekti i upoznavaju njihova konkretna svojstva povezana s pojmom. U osnovi ovog stupnja je, prema tome, osjetilna spoznaja.

II. **Predodžba o pojmu.** Drugi stupanj je uočavanje nečeg općeg i zajedničkog objektima u promatranom skupu.

III. **Formiranje pojma.** Treći stupanj je izdvajanje bitnog općeg svojstva takvih objekata.

U procesu nije teško prepoznati nekoliko značajnih znanstvenih postupaka: analizu, sintezu, apstrahiranje i poopćavanje. To znači da pojam nakon pažljive analize nastaje apstrahiranjem svojstava objekata koji stvarno postoje u svijetu oko nas i poopćavanjem.

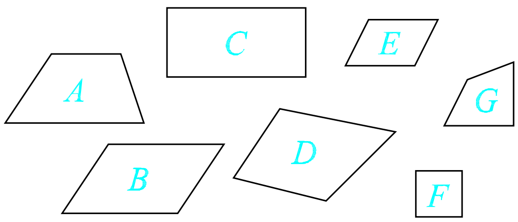
Proces formiranja pojmova u nastavi matematike ne mora, a vrlo često i ne može biti precizan i strog kao isti proces u znanosti. Sve ovisi o uzrastu i predznanju učenika. U osnovnoj školi on se treba što pažljivije i primjerenije provoditi. Svaki njegov stupanj ima tada određenu težinu i važnost za razvoj mišljenja učenika. Prijelazom s jednog stupnja na drugi razina mišljenja učenika se povisuje. Kritično mjesto obrade nekog pojma je prijelaz na onaj stupanj u kojem počinje postupak apstrahiranja, jer je prijelaz s konkretnog na apstraktno za neke učenike dosta težak. Proces završava definicijom. U srednjoj školi proces formiranja pojmova često se skraćuje. Nisu uvijek potrebni svi njegovi stupnjevi i do definicije pojma može se doći brže.

Proces formiranja pojmova u nižim razredima možemo okarakterizirati kao *konkretno-induktivan*, a u višim razredima kao *apstraktno-deduktivan*. Ilustrirat ćemo jedan i drugi način pri uvođenju nekoliko poznatih pojmova.

Primjer 1. Paralelogram.

I. Promatranje i opažanje.

Cilj: upoznavanje s jednom posebnom vrstom četverokuta. Zajednička djelatnost učitelja i učenika započinje promatranjem konkretnih modela četverokuta od papira, kartona, drveta ili žice. Zatim učitelj crta te četverokute na ploči ili predočuje na grafoskopu, a učenici crtaju u svojim bilježnicama.



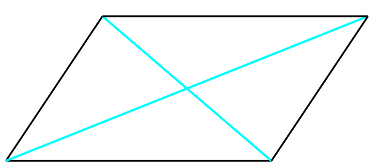
Mogu se još promatrati i slični objekti u okolini, kako bi se dodatno opravdala, naglasila i motivirala potreba proučavanja novog pojma.

Učenici uočavaju neka svojstva modela i učitelj ih upoznaje s činjenicom da su *B*, *C*, *E* i *F paralelogrami*.

II. Predodžba o pojmu.

U narednom koraku učitelj zahtijeva da učenici navedu svojstva paralelograma. Može očekivati da će učenici uočiti sljedeća svojstva:

Nasuprotne stranice su paralelne.
Nasuprotne stranice su sukladne.
Nasuprotni kutovi su sukladni.
Kutovi uz istu stranicu su suplementni.
Dijagonale se raspolavljaju.



Uočavanjem nekih svojstava paralelograma, među kojima se razlikuju bitna, nebitna i ekvivalentna svojstva, učenici su misaono od *opažanja* prešli na *predodžbu* o pojmu.

III. Formiranje pojma.

Prijeći od predodžbe o pojmu na sam pojam znači, pored ostalog, odbaciti nebitna svojstva a zadržati bitna svojstva pojma. Proces formiranja pojma završava definicijom pojma.

Definicija. Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne naziva se *paralelogram*.

Što je s ostalim bitnim svojstvima pojma? Ona su također mogla ući u definiciju pojma paralelograma, ali sada se ovdje izriču kao tvrdnje koje treba dokazati.

Poučci:

Nasuprotne stranice paralelograma imaju jednake duljine.

Nasuprotni kutovi paralelograma su jednaki.

Susjedni kutovi paralelograma su suplementni.

Dijagonale paralelograma se raspolavljaju.

Primijetimo na kraju da opseg O_P pojma paralelogram čine *romboidi, rombi, pravokutnici* i *kvadrati*.

* * *

Primjer 2. Drugi korijen.

Obradi pojmova *drugi korijen* i *korjenovanje* prethodi obrada pojmova *kvadrat broja* i *kvadriranje*. Uvođenje tih pojmova prirodno se motivira razmatranjem učenicima bliskog pojma *površina kvadrata*. Razmotrimo postupak uvođenja tih pojmova u kratkim crtama.

1) Uvođenje pojmova *kvadrat broja* i *kvadriranje* je jednostavnije. Za to je dovoljno samo promatranje umnoška broja sa

samim sobom. Uzmemo li konkretno da je duljina stranice kvadrata redom 7, 4.3, $\frac{2}{5}$, površina kvadrata je redom umnožak $7 \cdot 7$, $4.3 \cdot 4.3$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$. Te umnoške zapisujemo na novi način kao 7^2, 4.3^2, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ i zovemo kvadratima brojeva 7, 4.3, $\frac{2}{5}$.

Općenito, ako je a duljina stranice kvadrata, njegova površina P zapisuje se u obliku $P = a^2$.

Postupak proširujemo i na negativne brojeve pa tako primjerice umnoške $(-9) \cdot (-9)$, $(-11.8) \cdot (-11.8)$, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$ zapisujemo kao $(-9)^2$, $(-11.8)^2$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$.

Općenito, ako je x neki broj, umnožak $x \cdot x$ zapisuje se u obliku x^2 i zove se *kvadrat broja* x.

Sada se lako uvodi drugi pojam. Za svaki broj x postoji jedinstven kvadrat x^2. Pridružimo li broju x njegov kvadrat x^2, dobivamo jednu funkciju koja se naziva *kvadriranje*.

2) Uvođenje pojmova *drugi korijen* i *korjenovanje* je nešto složenije. Za motivaciju opet uzimamo površinu kvadrata, ali sada problem promatramo u obrnutom smjeru. Do tih pojmova doći ćemo traženjem odgovora na sljedeće pitanje: kolika je duljina a stranice kvadrata ako je poznata njegova površina P? Uzmimo konkretno da je površina P kvadrata redom 64, 2.89, $\frac{49}{100}$, 2, 5.1, $\frac{3}{10}$. U prva tri slučaja lako nalazimo da je duljina a stranice kvadrata redom 8, 1.7, $\frac{7}{10}$, jer je $8^2 = 64$, $1.7^2 = 2.89$, $\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$. U ostala tri slučaja odgovor nije tako lak. U svrhu rješavanja ovog problema treba uvesti jedan dodatni pojam.

Pogledajmo ponovo naš problem. Poznata je površina kvadrata, a nepoznata duljina njegove stranice. Označimo li tu nepoznatu duljinu sa x, ona je očito rješenje redom jednadžbe

$$x^2 = 64, \quad x^2 = 2.89, \quad x^2 = \frac{49}{100},$$

$$x^2 = 2, \quad x^2 = 5.1, \quad x^2 = \frac{3}{10}.$$

U ovim jednadžbama nalazi se kvadrat nepoznanice pa su to konkretni primjeri tzv. *kvadratne jednadžbe*. Opći oblik kvadratne jednadžbe ove vrste je

$$x^2 = b \quad (b > 0).$$

Prema tome, problem određivanja duljine stranice kvadrata kada je poznata njegova površina svodi se na rješavanje gornje kvadratne jednadžbe. Za prethodne konkretne kvadratne jednadžbe uočavamo: jednadžba $x^2 = 64$ ima rješenja 8 i -8, jednadžba $x^2 = 2.89$ rješenja 1.7 i -1.7, a jednadžba $x^2 = \frac{49}{100}$ rješenja $\frac{7}{10}$ i $-\frac{7}{10}$. Budući da postoje kvadrati kojima su površine jednake 2, 5.1 i $\frac{3}{10}$, zaključujemo da i jednadžbe $x^2 = 2$, $x^2 = 5.1$, $x^2 = \frac{3}{10}$ moraju imati rješenja. A to zapravo znači da kvadratna jednadžba $x^2 = b$ mora imati rješenje za svaki pozitivni broj b. Tako smo motivirali sljedeću definiciju.

Definicija. Pozitivan broj x za koji je $x^2 = b$, gdje je b zadan pozitivan broj, naziva se *drugi korijen iz broja b* i označava sa $\sqrt{b}$.

Pozitivan broj b i drugi korijen iz broja b povezuje, dakle, osnovna jednakost $(\sqrt{b})^2 = b$.

$\sqrt{b}$ je jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 = b$. Odmah se vidi da je i $-\sqrt{b}$ rješenje te jednadžbe, jer je i $(-\sqrt{b})^2 = (\sqrt{b})^2 = b$, pa ta jednadžba uvijek ima dva rješenja, pozitivan broj $\sqrt{b}$ i negativan broj $-\sqrt{b}$.

Sada nije teško reći kolike su duljine stranica kvadrata kojima su površine 2, 5.1, $\frac{3}{10}$. Te duljine su $\sqrt{2}$, $\sqrt{5.1}$, $\sqrt{\frac{3}{10}}$.

* * *

Primjer 3. Kvadratna jednadžba.

1) U prethodnom primjeru razmatran je poseban oblik kvadratne jednadžbe $x^2 = b$. To je već dobar početak. Motivaciju za uvođenje pojma opće kvadratne jednadžbe možemo dobiti iz niza jednostavnih problema. Primjerice:

Zbroj dvaju brojeva je 2 001, a njihov umnožak 961 200. Koji su to brojevi?

U skupu cijelih brojeva problem bismo mogli pokušati riješiti rastavljanjem umnoška na faktore i kombiniranjem po dva faktora dok ne dobijemo zadani zbroj. Brži i sigurniji način je svođenje problema na rješavanje jednadžbi. Označimo li tražene brojeve sa x i y, uvjeti problema dadu se napisati u obliku sustava jednadžbi

$$x + y = 2\,001, \qquad xy = 961\,200.$$

Supstitucijom $y = 2\,001 - x$ iz prve jednadžbe u drugu dobiva se jednadžba

$$x^2 - 2\,001x + 961\,200 = 0.$$

2) Došli smo do jednadžbe novog oblika koju učenici u tom trenutku ne znaju riješiti. Zato je prirodno uvesti najprije novi pojam.

Definicija. Jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su a, b, c realni brojevi i pri tome $a \neq 0$, naziva se *algebarska jednadžba drugog stupnja* ili *kvadratna jednadžba*.

Da bi se pojam utvrdio i brže usvojio, nastavnik treba upoznati učenike s nizom konkretnih kvadratnih jednadžbi:

$$2x^2+7x+10=0, \qquad x^2-9x+\sqrt{5}=0,$$

$$\frac{1}{3}x^2+85x=0, \quad -14x^2+1=0, \quad x^2=0 \text{ i dr.}$$

Definiciju i primjere treba dopuniti opisom koeficijenata kvadratne jednadžbe.

* * *

Primjer 4. Površina i obujam.

Površina skupa točaka u ravnini jedan je od najpoznatijih matematičkih pojmova. Učenici vrlo uspješno računaju površine različitih likova primjenom poznatih formula. Ali, što je to površina? Na ovo pitanje malo koji bi učenik znao odgovoriti, a ono često zbunjuje i studente matematike. Potražimo odgovor.

Tijekom mnogih stoljeća ljudi su mjerili površine, rade to neprestano i danas, pa potrebu proučavanja površine i nije potrebno posebno isticati. Pri mjerenju površine došli su do različitih svojstava površine. Prirodno se izdvajaju sljedeća četiri jednostavna svojstva površine iz kojih se mogu izvesti sva ostala svojstva:

Površina je uvijek nenegativan broj.

Ako je neki lik sastavljen od dijelova, onda je njegova površina jednaka zbroju površina tih dijelova.

Sukladni likovi imaju jednake površine.

Kvadrat sa stranicom duljine 1 ima površinu jednaku 1.

Može se bez ikakve sumnje reći da ove činjenice učenici intuitivno znaju. Nužno je samo to znanje aktivirati! Tako se na jednostavan način dolazi do motivacije kako da se uvede pojam površine poligona koji učenici mogu lako prihvatiti.

Definicija. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poligona u ravnini, uključujući i prazan skup. *Površina* na skupu $\mathcal{P}$ je preslikavanje $p : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ koje ima sljedeća svojstva:

1) $p(P) \geq 0$ za svaki poligon P.
2) Ako je poligon P zbroj poligona P_1 i P_2, onda je
$$p(P_1 + P_2) = p(P_1) + p(P_2).$$
3) Ako su poligoni P_1 i P_2 sukladni, onda su brojevi $p(P_1)$ i $p(P_2)$ jednaki, tj.
$$P_1 \cong P_2 \implies p(P_1) = p(P_2).$$
4) Postoji bar jedan kvadrat K s duljinom stranice 1 takav da je $p(K) = 1$.

Broj $p(P)$ naziva se *površina poligona* P.

Teorija mjerenja obujma skupova točaka u prostoru slična je teoriji mjerenja površine skupova točaka u ravnini. Posebno su poligoni i poliedri vrlo srodni. Zato definiciju obujma poliedra uvodimo na posve analogan način:

Definicija. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poliedara u prostoru, uključujući i prazan skup. *Obujam* na skupu $\mathcal{P}$ je preslikavanje $v : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ koje ima sljedeća svojstva:

1) $v(P) \geq 0$ za svaki poliedar P.
2) Ako je poliedar P zbroj poliedara P_1 i P_2, onda je
$$v(P_1 + P_2) = v(P_1) + v(P_2).$$
3) Ako su poliedri P_1 i P_2 sukladni, onda su brojevi $v(P_1)$ i $v(P_2)$ jednaki, tj.
$$P_1 \cong P_2 \implies v(P_1) = v(P_2).$$
4) Postoji bar jedna kocka K duljine brida 1 takva da je $v(K) = 1$.

Broj $v(P)$ naziva se *obujam poliedra* P.

* * *

Napomena. Pojmovi, opisani u naša četiri primjera, na stanovit način međusobno su povezani: u prvom primjeru susrećemo pojam *kvadrat*, u drugom primjeru površina kvadrata i poseban oblik pojma *kvadratna jednadžba* motivirali su nam potrebu uvođenja pojma *drugi korijen*, u trećem primjeru razmatra se pojam *kvadratna jednadžba*, a u četvrtom primjeru odgovara se na pitanje što je zapravo *površina*.

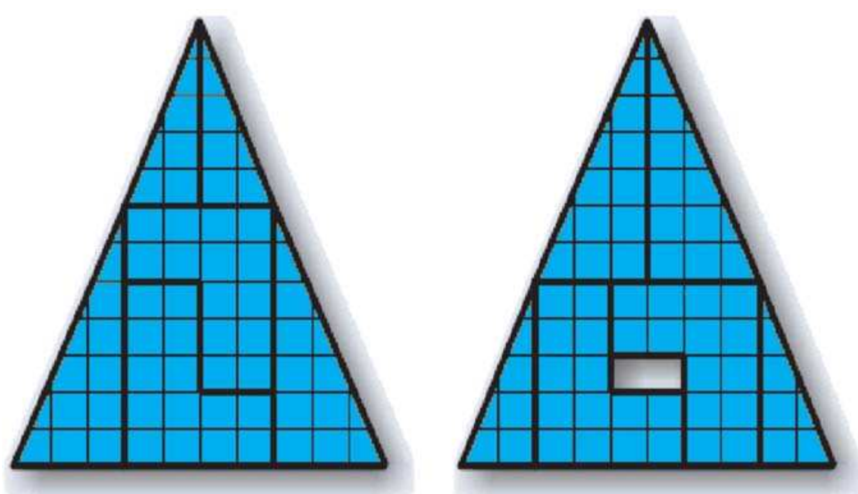
Neka nam na kraju kao stanovit sažetak razmatranja posluži ova misao poznatog francuskog matematičara Frécheta:

“Ako je nešto zaista potrebno, onda je to iskorjenjivanje dogmatičke metode: ne treba davati nikakvih definicija, a da se ne ukaže kako su one iznikle, zašto su nužne, kako se primjenjuju”.

Misao je vrlo jasna i dobro ukazuje na smjer kojim se treba kretati proces formiranja pojmova. U skladu je s opisom toga procesa u ovom članku.

Literatura

[1] I. Gusić, *Tri razine obrade matematičkih pojmova*, Matematika i škola 8 (2001), 111–118.
[2] Z. Kurnik, *Matematički pojam*, Matematika i škola 11 (2001), 8–16.
[3] V. A. Oganesjan i dr., *Metodika prepodavanija matematiki v srednej škole*, Prosveščenie, Moskva 1980.
[4] R. Živković, *Uvođenje novih matematičkih pojmova u nastavi*, Matematika 2 (1986), 5–13.



Izrežite lijevi trokut na šest dijelova kako je naznačeno na slici. Presložite dijelove u novi trokut kao na slici desno. Jesu li trokuti sukladni? A što je s rupom u sredini? U čemu je trik?