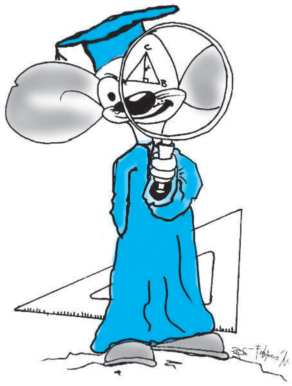

Načelo znanstvenosti

Zdravko Kurnik, Zagreb

Osnovni cilj nastave matematike, koji se postavlja pred svakog učenika, ne smije biti puko usvajanje gradiva propisanog programom i stjecanje znanja koja se temelje samo na nizu pravila, formula i umijeća rješavanja jednostavnih standardnih zadataka. Danas se pred nastavu matematike postavlja kao prioritetni sljedeći problem:

Problem razvoja stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika.

Suvremena metodika nastave matematike pruža razne mogućnosti za rješavanje ovog problema. Prvu mogućnost nastavnik matematike može naći već u temeljnim idejama i smjernicama na osnovu kojih izvodi nastavu. To su **načela nastave matematike**.

U osnovnoj i srednjoj školi uspostavljaju se ova načela:

Načelo primjerenosti, načelo zornosti, načelo interesa, svjesnosti i aktivnosti, načelo sistematičnosti i postupnosti, načelo trajnosti znanja, vještina i navika, načelo individualizacije, načelo odgojnosti nastave, načelo problemnosti, načelo znanstvenosti.

Sva su načela podjednako važna, jer izražavaju bitna polazišta nastave matematike. Zato ih treba u nastavi matematike i podjednako uvažavati i primjenjivati. Ona se usko povezana. Nije rijedak slučaj da se ostvarivanjem jednog načela ostvaruje i neko drugo načelo. Osnovna značajka svakog načela sadržana je već u samom nazivu načela i ona su nastavnicima matematike uglavnom jasna. Jedno načelo ipak često izaziva nedoumicu: **načelo znanstvenosti**. Što znači znanstvenost nastave matematike? Cilj ovog članka i jest da pobliže opiše to značenje.

Načelo znanstvenosti nastave matematike sastoji se u nužnom skladu nastavnih sadržaja i nastavnih metoda s jedne strane i zahtjeva i zakonitosti matematike kao znanosti s druge strane. To znači da nastavnik matematike treba učenike upoznavati s onim činjenicama i u njihovom mišljenju formirati one matematičke pojmove koji su danas znanstveno potvrđeni. Nastava matematike mora biti takva da omogućuje daljnja produbljivanja i proširivanja gradiva i prirodan nastavak matematičkog obrazovanja na višoj razini.

Pogledajmo najprije vezu glavnih oblika mišljenja i načela znanstvenosti.

Primjer 1. Pojmovi i poučci.

1) Pri obradi matematičkih pojmova nastavnik ostvaruje načelo znanstvenosti ako pravilno provodi proces formiranja pojma (opažanje, predodžba o pojmu, formiranje pojma) i pridržava se osnovnih pravila koja mora zadovoljavati definicija pojma (primjerenost, minimalnost sadržaja, sažetost, prirodnost, prikladnost, primjenjivost, suvremenost).

2) Pri obradi poučaka nastavnik ostvaruje načelo znanstvenosti ako svoje učenike nauči ispravno i precizno formulirati poučak, jasno razlikovati pretpostavku od tvrdnje poučka, formulirati obrat poučka, formulirati suprotnu tvrdnju, te ako postigne razumijevanje metodike dokazivanja poučaka.

3) Učenici ponekad ne razlikuju definicije pojmova i poučke. To se vidljivo očituje u njihovim pokušajima da i definicije dokažu. Pogledajmo rečenice:

Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne.

Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice sukladne.

Za učenike obje su rečenice vrlo slične i nije čudo ako ih oni u prvi trenutak i slično razmatraju i prihvaćaju. Medutim, prva rečenica je uobičajena definicija paralelograma, pa se ne dokazuje, a druga rečenica je tada poučak i on se treba dokazati. Moguće je i da se druga rečenica uzme za definiciju paralelograma, doduše manje prikladnu zbog nesklada s terminom paralelogram, tada se ona ne dokazuje, a prva rečenica u tom slučaju je poučak i on se treba dokazati.

Nastavnik matematike može primjerenim formulacijama poboljšati razumijevanje opisanih razlika. Jasnim razlikovanjem definicija i poučaka ostvaruje se također načelo znanstvenosti.

* * *

Ponekad se načelo znanstvenosti ostvaruje i u dogovoru o značenju nekog pojma, veličine ili objekta i objašnjenju razloga zašto se taj dogovor uvodi.

Primjer 2. Dogovorne definicije.

1) Broj 1. Je li 1 prost broj ili nije? Broj 1 formalno zadovoljava definiciju prostog broja: on je djeljiv samo sa 1 i sa samim sobom. Medutim, broj 1 se ipak ne uključuje u skup prostih brojeva. Jedan od razloga dogovora da 1 nije prosti broj nalazimo u osnovnom teoremu aritmetike po kojem se svaki prirodni broj, različit od 1, može na jedinstven način napisati u obliku umnoška prostih faktora. Kad bismo uzeli da je 1 prosti broj, taj teorem, bez dodatnih uvjeta, ne bi vrijedio. U tom slučaju imali bismo, na primjer, za broj 2002 ove rastave na proste faktore

$$\begin{aligned}2002 &= 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = 1\cdot 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\\ &= 1\cdot 1\cdot 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13 \quad \text{itd.}\end{aligned}$$

Dakle, rastav ne bi bio jedinstven. Tako bi bilo za svaki prirodni broj.

2) Prazan skup $\emptyset$. Prazan skup je skup koji ne sadrži nijedan element. Ovo značenje praznog skupa ne bi imalo puno smisla kad ne bi za to postojao ozbiljan znanstveni razlog. Njega nalazimo u operaciji presjek skupova. Zahtjev da presjek $A\cap B$ bilo koja dva skupa A i B bude skup, a to znači i presjek disjunktnih skupova, vodi do potrebe uvođenja pojma prazan skup.

3) $a^0 = 1$. U školskoj matematici ova se jednakost često uvodi bez objašnjenja. A to objašnjenje je jednostavno. Ono proizlazi iz pravila za dijeljenje potencija jednakih baza: $a^m : a^n = a^{m-n}$. Za $m = n$ lijeva strana jednakosti očito je jednaka 1, a desna a^0. Da bi pravilo vrijedilo i u tom slučaju, stavlja se da je $a^0 = 1$.

* * *

Već smo naglasili važnost za suvremenu nastavu matematike uske povezanosti matematike kao nastavnog predmeta i matematike kao znanosti. Usporedimo pobliže rad nastavnika matematike i rad matematičara-znanstvenika.

Rad znanstvenika u mnogo čemu se razlikuje od rada nastavnika matematike u razredu. No postoje i neke zajedničke značajke. Znanstvenik u procesu spoznaje primjenjuje posebna sredstva — znanstvene metode istraživanja. One su mu potrebne za dobivanje novih tvrdnji, njihova dokazivanja i dovođenja u vezu s već poznatim činjenicama i teorijama.

Nastavnik matematike u nastavnom procesu pomaže učenicima da otkrivaju i spoznaju nove matematičke istine. Do tih spoznaja može se doći na razne načine. Posebno je važno otkrivanje puta k samostalnom stvaralačkom radu učenika. Zato su znanstvene metode važne i za suvremenu nastavu matematike i zato su one predmet izučavanja u suvremenoj metodici nastave matematike. Kreativan nastavnik, birajući pogodne probleme i primjenjujući te metode, može učenike osposobiti za rad koji je vrlo blizak istraživačkom radu, radu znanstvenika. Mnogo je nastavnih matematičkih sadržaja za takvu primjenu. U njima se može u punoj mjeri ostvariti načelo znanstvenosti.

Osnovne metode znanstvenog istraživanja jesu:

Analiza i sinteza, apstrakcija i konkretizacija, indukcija i dedukcija, generalizacija i specijalizacija, analogija.

Učenike treba postupno i primjereno naučiti **analizirati, sintetizirati, konkretizirati, apstrahirati, inducirati, deducirati, generalizirati, specijalizirati, uočavati analogije**, bez obzira hoće li se oni kasnije ozbiljnije baviti matematikom ili ne. Matematički način mišljenja dragocjena je stečevina matematičkog obrazovanja, primjenjiva i u mnogim drugim djelatnostima. Naglasak je na riječima postupno i primjereno. Ako se znanstveni postupci primjereno i pravilno primjenjuju, s nužnim osjećajem za težinu matematičkih sadržaja i matematičkog načina mišljenja, uvažavajući matematičke sposobnosti svakog pojedinog učenika, može se očekivati da će nastava matematike biti uspješna. U protivnom, učenici će imati znatnih poteškoća pri svladavanju nastavnog gradiva i oni s vremenom mogu steći pogrešan dojam da je matematika teži predmet nego što to ona uistinu jest. Na žalost, često se u udžbenicima matematike, a onda kao posljedica i u nastavnom procesu, ne poklanja dovoljno pozornosti na pravilnost primjene znanstvenih postupaka. Za obrade nekih matematičkih sadržaja može se čak ustanoviti da su s tog gledišta pogrešne. Time je povrijeđeno načelo znanstvenosti.

Pravilnost primjene znanstvenih postupaka ilustrirat ćemo ukratko s nekoliko jednostavnih i karakterističnih primjera obrade matematičkih sadržaja.

Primjer 3. Iz nastavnih programa.

1) Zbroj K_n svih unutarnjih kutova mnogokuta. Pri obradi ove nastavne jedinice u sedmom razredu osnovne škole treba krenuti od u prethodnom razredu spoznatih činjenica. Prva od tih činjenica je izreka o zbroju svi unutarnjih kutova trokuta: $K_3 = 180°$. Druga činjenica je izreka o zbroju svih unutarnjih kutova četverokuta: $K_4 = 360° = 2 \cdot 180°$. Dalje treba za zbroj svih unutarnjih kutova peterokuta izvesti formulu $K_5 = 540° = 3 \cdot 180°$, za zbroj svih unutarnjih kutova šesterokuta izvesti formulu $K_6 = 720° = 4 \cdot 180°$, a zatim treba navesti učenike da zaključe da je za sedmerokut $K_7 = 5 \cdot 180°$, za osmerokut $K_8 = 6 \cdot 180°$ itd. Slijedi usporedivanje formula.Tek nakon svih ovih koraka učenici bi trebali biti misaono pripremljeni za iskazivanje opće izreke:

Zbroj K_n svih unutarnjih kutova mnogokuta sa n stranica dan je formulom

$$K_n = (n-2) \cdot 1800.$$

Analizirajmo opisani postupak. Prva dva koraka su predznanje učenika i početni induktivni zaključci, treći i četvrti korak su dva nova induktivna izvoda, peti i šesti korak su zaključci dobiveni analogijom, a na kraju je izvedena generalizacija. Time je pokazano kako se pravilno primjenjuje **indukcija**. Znanstvenost u ovom primjeru ostvaruje se u tome što se u njemu razmatra primjeren broj posebnih slučajeva koji mišljenje učenika na prirodan način vode do tražene **generalizacije**.

2) Visina jednakokračnog trokuta. Formule $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ za duljinu v visine jednakostraničnog, odnosno jednakokračnog trokuta, izraženu pomoću duljina a i b njegovih stranica, dobivaju se primjenom Pitagorina poučka.

Ako se najprije izvodi formula $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, formula $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ je, kao što znamo, njezina generalizacija i nju je nakon toga potrebno izvesti na analogan način.

Ako se najprije izvodi formula $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$, onda formulu $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ nije potrebno analogno izvoditi. Budući da je jednakostraničan trokut posebna vrsta jednakokračnog trokuta, druga se formula dobiva iz prethodne opće formule zamjenom veličine b sa a, tj. specijalizacijom.

Poželjno je da se u nastavi primjenjuju oba načina izvodenja. Promjena metoda rada jedna je od osobina kreativnog učitelja matematike. Svoju kreativnost ovdje on može iskoristiti da učenike još jednom poduči što su to **generalizacija** i **specijalizacija**.

3) A-G nejednakost. Izreka:

Ako su a i b pozitivni realni brojevi, onda aritmetičku i geometrijsku sredinu tih brojeva povezuje nejednakost

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Da bismo dokazali ovu nejednakost, polazimo od nje i iz nje izvodimo redom nejednakosti $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

Je li ovo dokaz? Nije. Ovo je samo analiza kojom smo otkrili tek početni korak dokaza, očiglednu nejednakost $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Sam dokaz izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\
&\quad \Longrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0 \\
&\quad \Longrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \\
&\quad \Longrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \\
&\quad \Longrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

Učenici trebaju iz ovog i sličnih primjera shvatiti da **analiza** nema snagu dokaza tvrdnji, već da njena primjena vodi tek do otkrivanja načina dokazivanja tvrdnji. Za dokazivanje se primjenjuje **sinteza**.

4) Pravila. Važni dijelovi nastavnog gradiva su različita pravila za brojeve koja učenici trebaju pamtiti i primjenjivati. Njihova obrada često nije primjerena i u skladu s načelom znanstvenosti.

Uzmimo kao primjer pravilo $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ za drugi korijen iz umnoška dvaju pozitivnih brojeva a, b i zadatak da se izračuna vrijednost $\sqrt{256 \cdot 484 \cdot 729}$. Ako je razmatrano samo pravilo za dva broja, svi učenici nisu spremni za rješavanje zadatka primjenom pravila. Nastavnik je obradu skratio za jedan važan korak, što kod učenika može poremetiti misaoni proces. Zato je potreban taj korak, a to znači pravilo iz metodičkih razloga i uskladu s načelom znanstvenosti najprije analogijom proširiti za više od dva broja, pa tek onda prijeći na primjenu. Analogijom se pravilo proširuje za tri i četiri broja ovako:

$$\begin{aligned}
\sqrt{abc} &= \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} \\
&= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}, \\
\sqrt{abcd} &= \sqrt{(abc)d} = \sqrt{abc} \cdot \sqrt{d} \\
&= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d}.
\end{aligned}$$

Na temelju prvog proširenja učenici bi bez teškoća trebali riješiti gornji zadatak: $\sqrt{256 \cdot 484 \cdot 792} = \sqrt{256} \cdot \sqrt{484} \cdot \sqrt{792} = 16 \cdot 22 \cdot 27 = 9504$.

Nakon analogije učenici su sada misaono blizu formuliranja sljedeće opće izreke:

Neka je n prirodni broj veći od 1 i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi jednakost*

$$\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_n}.$$

U nastavi ova jednakost može se izreći i bez uporabe oznaka:

Kvadratni korijen iz umnoška pozitivnih brojeva jednak je umnošku kvadratnih korijena iz pojedinih faktora.

Ovaj primjer pokazuje kako se primjenom načela znanstvenosti skladno povezuju i dopunjuju **indukcija**, **analogija** i **generalizacija**.

5) Jednadžbe $x^2 - 2 = 0$**,** $x^2 + 1 = 0$**.** Na prvi pogled to mogu izgledati samo kao jednostavni primjeri kvadratnih jednadžbi. Međutim, tim jednadžbama može se dati dublji znanstveni smisao i one u nastavi matematike zato igraju važniju ulogu.

Jednadžba $x^2 - 2 = 0$ daje duljinu dijagonale kvadrata kojemu je duljina stranice jednaka 1. Ona nema rješenje u skupu racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$. Budući da rješenje, $\sqrt{2}$, očito postoji, to zahtjev da ta jednadžba ima rješenje u nekom skupu brojeva dobra je motivacija potrebe proširenja skupa racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ i uvođenja skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$. Osim toga, ovdje se pojavljuju i neka druga važna pitanja: rješavanje kvadratne jednadžbe, uvođenje pojma drugog korijena, iracionalnost broja $\sqrt{2}$ i indirektni dokaz svođenjem na kontradikciju.

Jednadžba $x^2 + 1 = 0$ najjednostavniji je primjer kvadratne jednadžbe koja nema rješenja u skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$, jer je kvadrat realnog broja uvijek nenegativan. Zahtjev da svaka kvadratna jednadžba ima rješenja u nekom skupu brojeva daje motivaciju potrebe proširenja skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ i uvođenja skupa kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$.

6) Matematika u nastajanju je konkretna i induktivna znanost, a sama matematika je apstraktna i deduktivna znanost. Ta činjenica govori sve o tome koliko su i za nastavu matematike važne četiri znanstvene metode istraživanja: **konkretizacija, indukcija, apstrakcija** i **dedukcija**.

* * *

Na kraju ovog opisa načela znanstvenosti i njegove primjene u nastavi matematike još samo jedna napomena. Nastavnik matematike ne mora biti znanstvenik da bi u nastavi pravilno i primjereno primjenjivao načelo znanstvenosti i znanstvene metode. To se u nastavi matematike nameće samo po sebi. Rješavanje svakog problema ima nešto otkrivalačko i stvaralačko. Zato je potrebno samo da nastavnik u svojim učenicima razvija radoznalost duha, sklonost za samostalan umni rad i da im ukazuje na putove do novih otkrića. Kreativan nastavnik matematike u kreativnoj nastavi ima velike izglede da kod svojih učenika razvije kreativne osobine.

Literatura

[1] I. Gusić, *Tri razine obrade matematičkih pojmova*, Matematika i škola 8 (2001), 111–118.

[2] I. Gusić, *Stručnost u nastavi matematike*, Poučak 7 (2001), 5–14.

[3] Z. Kurnik, *Analiza*, Matematika i škola 2 (1999), 54–64.

[4] Z. Kurnik, *Analogija*, Matematika i škola 3 (2000), 101–109.

[5] Z. Kurnik, *Generalizacija*, Matematika i škola 4 (2000), 147–154.

[6] Z. Kurnik, *Indukcija*, Matematika i škola 5 (2000), 197–203.

[7] Z. Kurnik, *Suvremena metodika i nastava matematike*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, Zagreb 2000, 187–201.

[8] Z. Kurnik, *Apstrakcija*, Matematika i škola 6 (2000), 11–15.

[9] Z. Kurnik, *Poučak ili teorem*, Matematika i škola 8 (2001), 101–105.

[10] Z. Kurnik, *Dokaz*, Matematika i škola 9 (2001), 149–155.

[11] Z. Kurnik, *Matematičke sposobnosti*, Matematika i škola 10 (2001), 195–199.

[12] Z. Kurnik, *Matematički pojam*, Matematika i škola 11 (2001), 8–16.

[13] Z. Kurnik, *Metodika uvođenja novih pojmova*, Matematika i škola 12 (2001), 55–59.