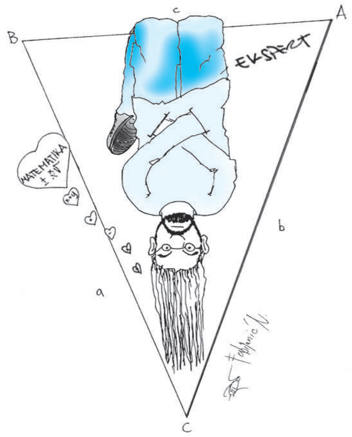


Poseban slučaj...

Branimir Dakić, Zagreb

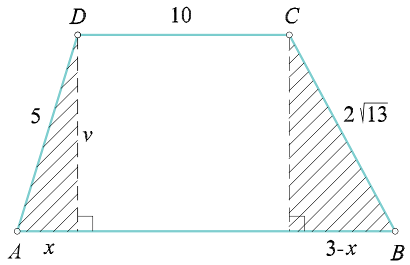
Često nam se događa da uz neki matematički zadatak kažemo: *Da, ali to je poseban slučaj....* Posebice griješimo pri rješavanju geometrijskih zadataka, pa i sami ponekad nehotice nacrtamo, ako ne jednakokračan, onda šiljastokutan trokut, premda je rečeno jednostavno *trokut*. Četverokut znademo predočiti paralelogramom, piramida nam je uvijek uspravna piramida i sl.

Učenici na temelju takvih slika zaključuju da visina trokuta raspolavlja stranicu, da se dijagonale četverokuta raspolavljaju, da su središta upisane i opisane kružnice svakom trokutu ista točka koja leži unutar trokuta itd.

Ovakve greške valja znati dobro metodički iskoristiti. Dapače, pri rješavanju zadataka povremeno treba ubaciti poneki čije rješenje upozorava da je riječ o *neobičnoj situaciji*.

Evo dvaju lijepih primjera:

Primjer 1. Kolika je površina trapeza čije su osnovice duge 13 cm i 10 cm, a duljine krakova su 5 cm i $2\sqrt{13}$ cm?



To je standardan zadatak za čije rješenje treba izračunati visinu trapeza. Izrazimo je primjenom *Pitagorinog poučka* na svaki od dva iscrtana trokuta:

$$25 - x^2 = 52 - (3 - x)^2,$$

a odatle slijedi $x = -3$.

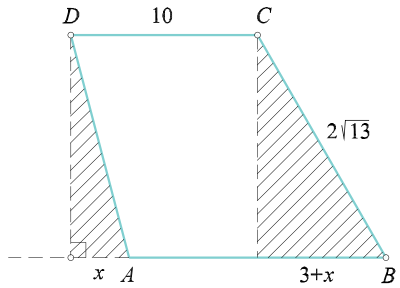
Mogli bismo zaključiti da trapez sa zadanim stranicama ne postoji, što dakako nije točno. Trapez naime ne izgleda onako kako smo ga nacrtali, već pri vrhu A ima tupi kut.

Nacrtamo novu sliku i prema toj *pravoj* slici je:

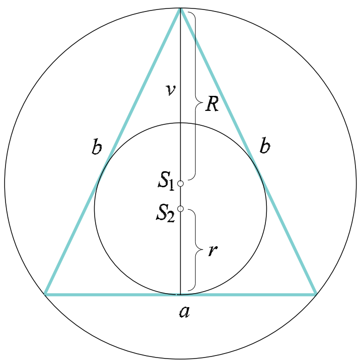
$$25 - x^2 = 52 - (x + 3)^2.$$

Odatle je $x = 3$, i konačno, $v = 4$ cm.

Dalje je lako izračunati i površinu trapeza.



Primjer 2. Jednakokračnom trokutu s osnovicom 32 cm i krakom 20 cm upisana je i opisana kružnica. Kolika je udaljenost središta tih dviju kružnica?



Najčešće, ne razmišljajući o rasporedu središta S_1 i S_2, nacrtamo ovakvu sliku, pa računamo

$$|S_1S_2| = v - (R + r).$$

Odatle nakon što izračunamo $v = 12\,\text{cm}$, $R = \frac{50}{3}\,\text{cm}$, $r = \frac{8}{3}\,\text{cm}$, dobijemo $|S_1S_2| < 0$.

Kako? Zašto?

Mala analiza će pokazati da je kut trokuta $\triangle ABC$ pri vrhu C tup, zbog čega je točka S_2, središte trokutu opisane kružnice, izvan trokuta.

No problem se jednostavno rješava tako da se uzme $|S_1S_2| = |v - (R + r)|$.

Ovdje je zanimljivo postaviti pitanje:

Kako uz zadane duljine stranica trokuta zaključiti je li trokut šiljastokutan, pravokutan ili tupokutan?

Znademo da se iz poznatih stranica kut trokuta određuje iz jednakosti $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Očito, ako je $a^2 + b^2 > c^2$, tada je $\cos\gamma > 0$ i kut γ je šiljast, ako je $c^2 = a^2 + b^2$, tada je $\cos\gamma = 0$ i kut γ je pravi, a za $a^2 + b^2 < c^2$ je $\cos\gamma < 0$ te je kut γ tup.

No nije *poseban slučaj* nešto što valja izbjegavati. Baš naprotiv, ponekad ćemo se pri rješavanju zadataka koristiti **metodom posebnog slučaja**. To nam nije nepoznato u algebri, ali imamo lijepih primjera primjene tog postupka i u geometriji.

Primjer 3. Odrediti najmanji kut trokuta čije su duljine stranica u omjeru 3 : 5 : 6.

Uvjetom zadatka nije dan poseban trokut, već je tim omjerom zadan skup sličnih trokuta. Trokut sa stranicama duljina $a = 3$, $b = 5$, $c = 6\,\text{cm}$ njihov je predstavnik. Slični trokuti imaju jednake kutove. Uzet ćemo stoga baš $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, te uvrstiti, vodeći računa o tome da je najmanji kut nasuprot najmanjoj stranici:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13}{15}.$$

Odatle nalazimo $\alpha = 29°55'35''$.

Napomenimo da se pri rješavanju ovog zadatka u pravilu uzima $a = 3k, b = 5k, c = 6k$, gdje je $k \in \mathbf{R}^+$, (čime se "glumi" općenitost i strogoća rješavanja), uvrsti se u formulu, te se dobije $\cos\alpha = \frac{25k^2 + 36k^2 - 9k^2}{2 \cdot 5k \cdot 6k}$. Ako ovaj razlomak kratimo, dobit ćemo i opet $\cos\alpha = \frac{13}{15}$.

Ako smo već odlučili tako riješiti zadatak, onda nemojmo nikako propustiti komentar kraćenja razlomka. Upravo to kraćenje je samo računska potvrda prethodnog geometrijskog tumačenja.

Uz istu temu imamo i malo složeniji problem, zadatak čije je rješenje još jedna metodička minijatura. Na tom ćemo primjeru još jednom ilustrirati kako valja pristupati rješavanju matematičkih zadataka, te se uvjeriti u njihovu didaktičku korisnost.

Primjer 4. Stranice trokuta imaju duljine n^2-1, n^2+n+1, $2n+1$, gdje je $n>1$. Odredi kut nasuprot stranice n^2+n+1.

Mogli bismo, zavedeni rješenjem prethodnog primjera, pomisliti: uzet ćemo $n=2$. Imamo trokut sa stranicama duljina 3, 7 i 5, te prema *teoremu o kosinusu* izračunamo $\cos\beta=-\frac{1}{2}$ i odatle $\beta=120°$.

Dakako, slijedi pitanje: čime opravdavamo poseban izbor broja n? Neće biti lako dati odgovor. Zapravo ga u ovom trenutku i nema. Mi ćemo zadatak ipak riješiti općenito:

$$\cos\beta=\frac{(n^2-1)^2+(2n+1)^2-(n^2+n+1)^2}{2(n^2-1)(2n+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Očito je $\beta=120°$, i taj rezultat uopće i ne ovisi o izboru broja n, $n>1$.

Duljine stranica odabrane su tako da $\cos\beta$ (kuta koji je nasuprot stranici n^2+n+1) ne ovisi o vrijednosti broja n. Ali kosinusi ostalih dvaju kutova, pa onda i sami kutovi, ovise o n. Kako, vidimo iz tablice koja je načinjena za $n=2,3,4,5,6$.

n	a	b	c	α	β	γ
2	3	7	5	$21°47'12''$	$120°$	$38°12'48''$
3	8	13	7	$32°12'15''$	$120°$	$27°47'45''$
4	15	21	9	$38°12'48''$	$120°$	$21°47'12''$
5	24	31	11	$42°6'12''$	$120°$	$17°53'48''$
6	35	43	13	$44°49'19''$	$120°$	$15°10'41''$

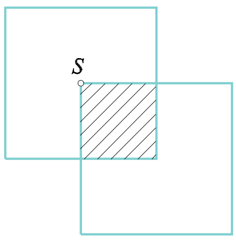
Mogli bismo dalje analizirati postavljeni problem istražujući na koji se način mijenja oblik trokuta u ovisnosti o izboru broja n. No to prepuštamo čitateljima.

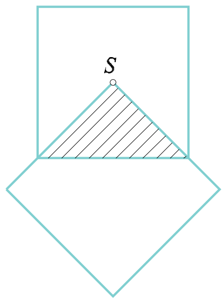
* * *

Učenici su često skloni pri rješavanju nekog zadatka nehotice pojednostavniti problem i rješavati neki njegov poseban slučaj. U sljedećim primjerima pokazat ćemo na koji se način i takva rješenja mogu iskoristiti kako bi se došlo do općeg rješenja zadatka.

Primjer 5. U ravnini su dana dva sukladna kvadrata, pri čemu je vrh jednoga u središtu drugoga. Kolika je površina zajedničkog dijela ovih dvaju kvadrata?

Kad učenicima postavite ovaj zadatak oni će nacrtati jednu od dviju sljedećih slika. I tada je lako doći do rješenja. Ako su kvadrati u položaju kao na prvoj slici, površina zajedničkog dijela jednaka je $\frac{1}{4}$ površine kvadrata.

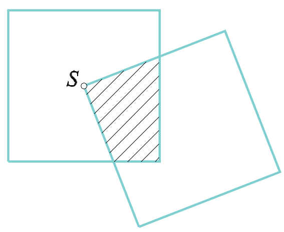




A ako su postavljeni u položaj onako kako je to nacrtano na drugoj slici, rezultat je isti.

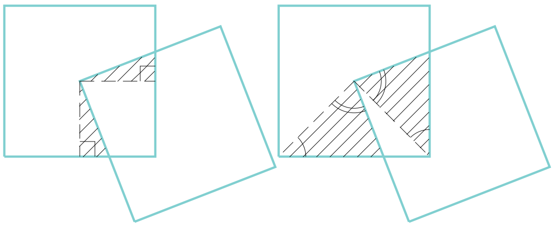
Je li zadatak riješen? Navedenim su rješenjima očito obuhvaćena dva posebna slučaja. O tome dvojbe nema.

Postavimo kvadrate u najopćenitiji položaj.



Do rješenja ćemo pokušati doći tako da opći slučaj prevedemo na jedan od dva posebna, prethodno već razmotrena. Time će učenici biti potaknuti da na sličan način postupe i u drugim slučajevima.

No kako to učiniti? Na to pitanje daju odgovor dvije sljedeće sličice.

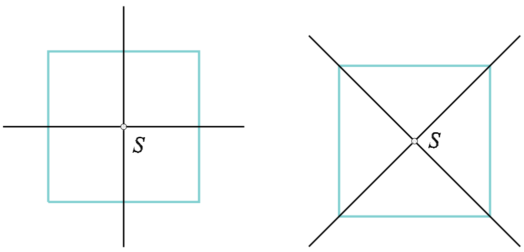


Dokažemo li sukladnost po dvaju iscrtanih trokuta na bilo kojoj od tih dviju sličica, time ćemo i općenito riješiti zadatak.

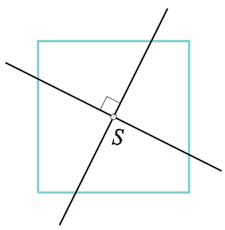
Primjer 6. Središtem kvadrata položena su dva međusobno okomita pravca. Dokažite da su odsječci tih dvaju pravaca unutar kvadrata jednaki.

Ovaj je zadatak sličan prethodnom, i on je kao njegova nadogradnja, didaktički gledano, vrlo vrijedan.

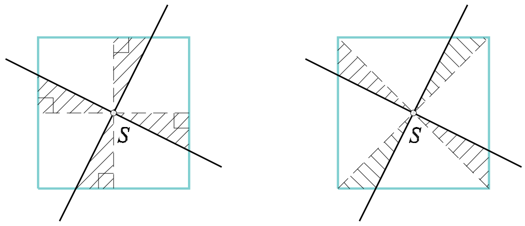
Nacrtajmo sliku. Ona može biti posebna na jedan od dva načina prikazana na donjim crtežima. U prvom su pravci usporedni stranicama kvadrata i očito su odsječci jednake duljine, a u drugom pravci prolaze suprotnim vrhovima kvadrata te su i opet odsječci jednake duljine.



Ali pravce ipak valja postaviti u opći položaj, onako kako je to prikazano na sljedećem crtežu.

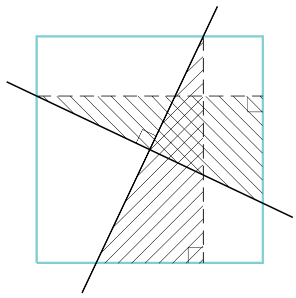


Sad opće rješenje možemo potražiti osvrćući se na dva prethodno razmotrena posebna slučaja. Pokušajte to učiniti koristeći se priloženim crtežima.



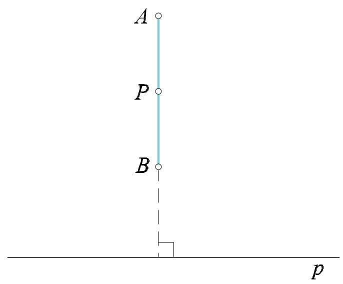
Zanimljivo je kako je predloženo rješenje ovog poznatog i čestog zadatka u jednoj zbirci zadataka.

Načini se konstrukcija kao na slici desno te se promatraju iscrtani trokuti. Dokazuje se njihova sukladnost iz koje onda proistječe i dokaz tvdnje što je iskazana u zadatku.



No ovome se sigurno teže dosjetiti, a nešto je složenije i dokazati spomenutu sukladnost.

Primjer 7. Točka A od pravca p udaljena je 8 cm, točka B od istog je pravca udaljena 3 cm. Kolika je udaljenost polovišta P dužine $\overline{AB}$ od pravca p?

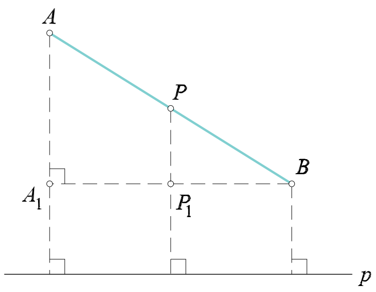


Izbor ovog zadatka potaknut je pričom jedne učenice, koja je bila razočarana neprimjerenom reakcijom nastavnika na njezino rješenje:

Ona je točke A i B odabrala na okomici na pravac p. Dužina $\overline{AB}$ dugačka je 5 cm te je lako vidjeti kako je polovište P te dužine od pravca p udaljeno 5.5 cm.

Naravno, prigovor je bio na poseban izbor položaja točaka A i B. Ali, je li taj prigovor opravdan? Pa zadatak o tome ništa ne govori.

Upravo navedeno rješenje je polazište za potpuniju analizu. Hoće li drukčiji odabir točaka A i B utjecati na rezultat zadatka?



Postavimo točke A i B u općenitiji položaj. Konstruiramo pravokutni trokut $\triangle AA_1B$. U njemu je dužina $\overline{PP_1}$ srednjica. Stoga je prema *teoremu o srednjici trokuta* $|PP_1| = \frac{1}{2}|AA_1| = 2.5$ cm i udaljenost točke P od pravca p iznosi 5.5 cm.

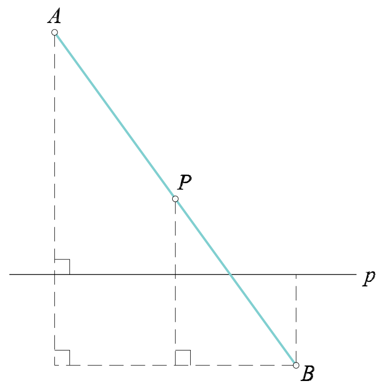
Čini se kako uistinu položaj točaka A i B možemo birati po volji, dakako poštujući uvjete zadatka. Da, to je točno, jer svaki se puta dobije pravokutni trokut koji se oblikom mijenja od slučaja do slučaja, ali jedna je njegova kateta (označili smo je sa $\overline{AA_1}$) uvijek iste duljine.

Drugim riječima, promjenom položaja točaka A i B mijenja se i položaj točke P ali je njezina udaljenost od pravca p uvijek 5.5 cm. Štoviše, dobro je zaključiti kako je skup točaka ravnine koji su polovišta svih dužina čija je jedna krajnja točka od danog pravca udaljena 8 cm, a druga 3 cm, (a obje su te točke s iste strane pravca), pravac paralelan zadanom i od njega udaljen 5.5 cm.

Jesu li time razjašnjene sve okolnosti vezane uz dani problem? Ne, nikako!

Vratimo se sada korak unatrag.

Točke A i B postavili smo s iste strane pravca p, a to u uvjetima zadatka nije izričito određeno. Stoga valja razmotriti i slučaj kad su te dvije točke s raznih strana pravca. Lako je zaključiti kako je tada polovište P dužine $\overline{AB}$ od pravca udaljeno 2.5 cm.



Tek je sada zadatak u potpunosti riješen. Učenica je dakle tek djelomice riješila zadatak. Ona je propustila razmotriti situaciju kad su točke A i B s raznih strana pravca p.

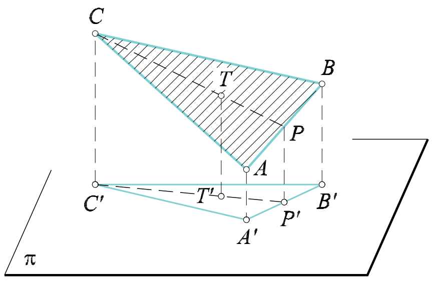
Primjer 8. Točke A, B i C s iste su strane ravnine π i od nje su udaljene redom za 2 cm, 3 cm i 4 cm. Kolika je udaljenost od ravnine π težišta trokuta $\triangle ABC$?

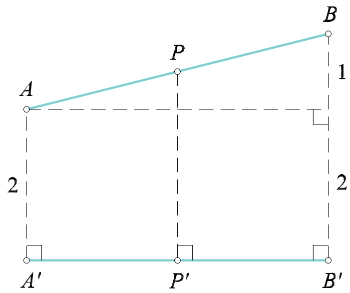
Zadatak je postavljen na klasifikacijskom ispitu za jedan od fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Vjerojatno se očekivalo da je rješavačima poznato da su koordinate težišta trokuta $\triangle ABC$ u prostoru jednake

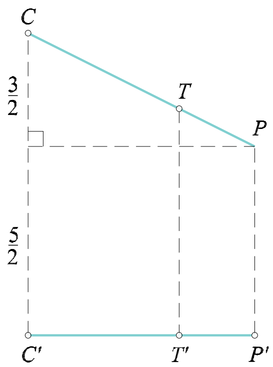
$$x_T = \frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C), \ y_T = \frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C).$$

Kako je u zadatku riječ o određivanju ordinate težišta, to je rješenje $y_T = 3$. Ujedno je jasno kako položaj točaka A, B i C nije podacima u zadatku potpuno određen što inače na rješenje zadatka nema utjecaja.

No ukoliko navedena činjenica učenicima iz nekog razloga nije poznata, oni se moraju prihvatiti drugog puta rješavanja.



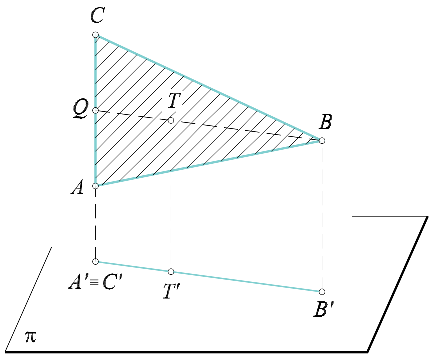




Dužina $\overline{PP'}$ srednjica je trapeza $A'B'BA$ pa je njezina duljina jednaka $\frac{5}{2}$. Zatim iz trapeza $P'C'CP$ odredimo $|TT'| = 3$ cm.

Ovaj zadatak očito ima dosta zajedničkog s prethodnim. Tako primjerice duljina dužine $\overline{PP'}$ uopće ne ovisi o položaju točaka A i B. Jedini uvjet koji one moraju zadovoljavati jest da budu iznad ravnine na zadanim udaljenostima. Isto vrijedi i za točku C.

Pa kad je to već tako, odaberimo najpogodniji položaj točaka A, B i C. Neka su A i C na okomici na ravninu π. Time su ravnina trokuta $\triangle ABC$ i ravnina π također međusobno okomite. Polovište stranice $\overline{AC}$, točka Q, od ravnine π udaljeno je 3 cm, a kako je od ravnine π jednako udaljena i točka B, zaključujemo da je težišnica $\overline{BQ}$ usporedna



s ravninom π i od nje udaljena 3 cm. Stoga je i težište T, koje pripada toj težišnici od ravnine π udaljeno za 3 cm.

Napomenimo kako je u nastavi matematike vrijedno i korisno uočavati mogućnosti jednostavnijeg rješavanja zadataka koristeći se posebnim situacijama pri čemu se ne umanjuje općenitost rješenja. To se često radi u koordinatnoj geometriji, gdje je pri dokazu nekih geometrijskih činjenica dopušten proizvoljan smještaj objekata u koordinatnoj ravnini (ili prostoru). Koristeći se invarijantama afine geometrije možemo pojednostavljivati zadatke u kojima se pojavljuju afina svojstva geometrijskih objekata.

Primijetimo na kraju kako imamo lijepih primjera *posebnosti* i u školskim udžbenicima. Tako primjerice na *Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice* gledamo kao na poseban slučaj *teorema o obodnom i središnjem kutu*. Pri obradi *poučka o kosinusu* upozoravamo kako iz njega proistječe *Pitagorin poučak* kao poseban slučaj. I tako dalje.

Razni zadaci ponekad u svojim uvjetima sadrže neku posebnu situaciju pa ih je stoga ponekad znatno lakše rješavati. No to zahtijeva prije svega dobru analizu zadatka, uočavanje te posebnosti i osposobljenost za drukčije rješavanje. Dakako, to spada također u kreativno ponašanje.

* * *