Načelo problemnosti

Zdravko Kurnik, Zagreb

Sustav načela nastave matematike

Polazne postavke i temeljne ideje na osnovu kojih se izvodi nastava zovu se, kao što znamo, **didaktička načela**. Ona su opće smjernice odgojno- obrazovnog rada i kao sastavni dio teorije nastave određuju se ciljevima nastave i odgoja, potrebama društvenog razvoja i osobitostima školske djelatnosti učenika, zasnovane na odgovarajućem stupnju njihovog psihičkog razvoja. S druge strane, didaktička načela određuju načine prenošenja učenicima određenih znanja, razvijanja njihovih umijeća, navika i sposobnosti — nastavne metode.

Didaktička načela međusobno su usko povezana i čine sustav. Nije rijedak slučaj da se ostvarivanjem jednog načela ostvaruje i neko drugo načelo. U temelje didaktike mogu biti ugrađeni različiti sustavi i s različitim brojem načela. Jedan od tih sustava čine sljedeća načela:

Načelo primjerenosti, načelo zornosti, načelo interesa, svjesnosti i aktivnosti, načelo sistematičnosti i postupnosti, načelo trajnosti znanja, vještina i navika, načelo odgojnosti nastave, načelo individualizacije.

Sva su načela podjednako važna, jer izražavaju bitna polazišta nastave. Zato se trebaju u nastavi svakog nastavnog predmeta, a to znači i u nastavi matematike, kako u osnovnoj tako i u srednjoj školi, podjednako uvažavati i primjenjivati. Osnovna značajka svakog načela sadržana je već u samom nazivu načela i ona su nastavnicima matematike uglavnom jasna. Međutim, matematika ima u odnosu na druge nastavne predmete neke osobitosti zbog kojih se gornji sustav obično nadopunjuje s još nekoliko načela, od kojih navodimo matematici posebno primjerena dva načela: **načelo znanstvenosti** i **načelo problemnosti**. Sva navedena načela zajedno čine tada **sustav načela nastave matematike**.

Načelo znanstvenosti opisano je u ovoj rubrici u prošlom broju MŠ-a. Cilj je ovog članka da se pobliže opišu značenje i značajke drugog istaknutog načela, načela problemnosti.

Načelo problemnosti

Nastava matematike je zahtjevan proces. Matematički sadržaji logički su povezani i razlikuju se po složenosti i težini. Neki su izrazito složeni i teški i za njihovo razumijevanje potreban je veći umni napor. Nastavnik matematike nastoji smanjiti ovu teškoću primjenjujući načela postupnosti i primjerenosti. Međutim, sam učenik često se prema tome odnosi sasvim drugačije. On tome pristupa površno, ne primjećuje tu nikakvih problema ni teškoća, pa ne ulaže za razumijevanje potreban napor, njemu se sve čini jasnim. Ova jasnoća potječe od neukosti i možemo je nazvati *jasnoća od nedostatka shvaćanja.*

Ilustrirajmo to s nekoliko slučajeva iz nastavničke prakse.

Primjer 1. Dogodilo se ...

1) Na pitanje što je paralelogram, učitelj dobiva odgovor: *Paralelogram je četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne i jednakih duljina.*

Malo će koji učenik znati da se u ovom odgovoru krije definicija i poučak.

2) Kako se definiraju okomiti pravci i pravi kut? Možda ovako: *Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju se okomiti pravci* i *Pravi kut je kut kojemu su kraci okomiti.*

Nešto nije u redu, zar ne? Ovakav par definicija "provjeren" je u metodičkoj radionici!

3) Motivacija potrebe obrade obrata Pitagorina poučka počinje pitanjem: *Je li trokut s duljinama stranica* $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ *pravokutan?*

Učitelj nije iznenađen kad učenik napiše jednakosti $5^2+12^2 = 25+144 = 169 = 13^2$ i odgovori da vrijedi Pitagorin teorem i da je trokut pravokutan. On u tom trenutku nije svjestan pogrešnosti svog zaključivanja. Ovakva pogreška može se naći i u ponekom udžbeniku. Naravno, nakon dokaza obrata Pitagorina teorema provjera na ovaj način bit će valjana.

4) Pogledajmo tvrdnju: *Svi pravi kutovi jednaki su jedan drugom.* Učenik primjećuje da se to samo po sebi razumije i nije mu jasno što se tu ima dokazati. Zapravo, djelomično je u pravu i blizu je pojmu aksioma! Izjava je kod Euklida zaista aksiom, ali danas je ona poučak i dade se dokazati.

5) Nejednakost $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ koja povezuje aritmetičku i geometrijsku sredinu pozitivnih realnih brojeva a i b učenik dokazuje ovako:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} &\implies a+b \geq 2\sqrt{ab}\\ &\implies a+b-2\sqrt{ab} \geq 0\\ &\implies (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0\\ &\implies (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.\end{aligned}$$

On ne shvaća da to nije dokaz i zašto to nije dokaz (v. [4]).

* * *

Što treba učiniti nastavnik matematike kada učenici ne zamjećuju probleme i kad im je odmah "sve jasno"? Metodika nudi jednostavan odgovor na to pitanje: treba primijeniti načelo problemnosti! Načelo možemo iskazati vrlo kratko:

$\boxed{\text{Najprije učiniti nejasnim, a zatim jasnim.}}$

To znači da razmatranja treba produbiti i učenike staviti pred problem. Pri tome mora se paziti da novi zahtjevi budu primjereni većini učenika. Svako produbljivanje povlači u prvom trenutku nestajanje prethodne jasnoće. Nejasnoća koja se pojavi prvi je znak uspjeha. Sada je potrebno dosta truda i dodatni umni napor da se savladaju nastale teškoće i razriješe problemi. Ponovo se pojavljuje jasnoća, ali na višoj razini. To je *jasnoća spoznavanja.*

Učenici nisu uvijek spremni na promjenu situacije i povišenje razine njezine problemnosti. Mogu biti kritični prema takvom obliku rada. Međutim *kritičko mišljenje* često je crta kreativnosti. Zato i njega treba kod učenika pravilno usmjeravati i razvijati. Sve to nije jednostavno ostvariti i zahtijeva od nastavnika matematike mnogo strpljivosti i umješnosti.

Pogledajmo kako se načelo problemnosti primjenjuje i ostvaruje pri obradi nekoliko odabranih matematičkih sadržaja.

Primjer 2. Pitagorin poučak.

1) Tradicionalna obrada ove teme ima jedan izraziti metodički nedostatak: počinje najčešće tako da se odmah na početku iskaže svojstvo duljina a, b i c stranica pravokutnog trokuta u obliku Pitagorina poučka $c^2 = a^2 + b^2$. Nerijetko manjka i dokaz, već se brzo prelazi na primjenu poučka na razne geometrijske likove. To nije pogrešno, i na taj način učenici će usvojiti poučak, postat će njihovo trajno znanje, pogotovo što će ih Pitagorin poučak "pratiti" tijekom daljnjeg školovanja. Međutim, u ovakvoj obradi načelo problemnosti prilično je zapostavljeno.

2) Problemski način obrade ovog matematičkog sadržaja ima nekoliko izvanrednih značajki. To su: visoka razina samostalnosti učenika, ispoljavanje određenog stupnja kreativnosti, brzo vlastito "otkriće" nove matematičke istine $c^2 = a^2 + b^2$. U obradi ove nastavne jedinice treba osmisliti samo dva koraka prije heurističkog otkrića Pitagorina teorema i to

a) Izračunavanje površine kvadrata u kvadratnoj mreži.

b) Proučavanje različitih Pitagorinih figura u kvadratnoj mreži i sastavljanje tablice s vrijednostima a^2, b^2, c^2.

Oba koraka vrlo su pogodna za primjenu jedne korisne metode u nastavi matematike u osnovnoj školi — metode demonstracije. Sigurno je da se u ovakvoj obradi Pitagorina poučka načelo problemnosti primjereno ostvaruje.

* * *

Primjer 3. Svojstva rješenja kvadratne jednadžbe.

Teorijske činjenice potrebne za obradu ovog pitanja su formule za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{*}$$

Svaka formula izražava jedno od rješenja kvadratne jednadžbe pomoću svih njezinih koeficijenata a, b i c. No, zanimljivo je i pitanje veze oba rješenja x_1 i x_2 s nekim od koeficijenata a, b i c. Problemnost ove situacije moguće je izraziti na tri različita načina. Izbor ovisi o predznanju učenika.

1) Nastavnik precizno postavlja problem učenicima. *Dokažite da za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c = 0$ vrijede jednakosti*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ovdje se radi o jednom poučku. Poznat je krajnji rezultat, a od učenika se samo očekuje da taj poučak dokažu.

2) Nastavnik stvara situaciju u kojoj se od učenika zahtijeva da sami razriješe problem koji se u toj situaciji nalazi i gdje jedna komponenta problemske situacije nije poznata.

Izrazite zbroj x_1+x_2 i umnožak x_1x_2 rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ pomoću njezinih koeficijenata a, b i c.

Ovdje krajnji rezultat nije poznat, ali je označen smjer u kojem se trebaju provesti razmatranja. Od učenika se očekuje otkrivanje formula i formulacija poučka.

3) Nastavnik stvara situaciju u kojoj se od učenika zahtijeva da sami shvate, formuliraju i razriješe problem koji se u toj situaciji nalazi.

Koja veza postoji između rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ i njezinih koeficijenata a, b i c?

Ovdje ima više nepoznanica. Nije poznat ni smjer istraživanja, ni krajnji rezultat. Od učenika se očekuje da sami otkriju da najjednostavniji rezultat daje razmatranje zbroja x_1+x_2 i umnoška x_1x_2 rješenja, ali nastavnik ne smije biti iznenađen ako kod učenika nađe i druge formule. Na primjer, formule

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

To samo može ukazivati na kreativnost njegovih učenika.

U sva tri slučaja cilj nastave je upoznati i dokazati tzv. Vìeteove formule (*). Jedino se u svakom od njih polazi s drugačije razine problemnosti.

4) Postoji još jedan važan trenutak pri razmatranju kvadratne jednadžbe: zapis kvadratne jednadžbe pomoću njezinih rješenja x_1 i x_2. Problemnost ove situacije nastavnik može tako i iskazati:

Pronađite način zapisivanja kvadratne jednadžbe kojoj su zadana rješenja x_1 i x_2.

Ovdje je nepoznat zapis kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c = 0$ u obliku $(x-x_1)(x-x_2) = 0$. Od učenika se očekuje da do toga zapisa dođu primjenom Vìeteovih formula.

* * *

Razmotrimo sada jedan teži problem koji je pogodan za rad s naprednijim učenicima i razvijanje njihovog stvaralačkog mišljenja.

Primjer 4. Određivanje cijelog dijela broja

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n > 1). \tag{1}$$

Cijeli dio nekog broja x najveći je cijeli broj koji nije veći od x. Označava se sa $[x]$. U našem slučaju treba odrediti $[x_n]$. Za male prirodne brojeve n određivanje broja $[x_n]$ je standardni zadatak i on se može riješiti aproksimiranjem pojedinih pribrojnika i neposrednim zbrajanjem. Ali, koliki je, na primjer, broj $[x_{10000}]$ ili broj $[x_{4008004}]$? Sada to postaje težak problemski zadatak. On se rješava primjenom nejednakosti, a problem i jest u pitanju: kojih nejednakosti?

a) Razmotrimo najprije jednostavniju problemsku situaciju. U nekim zbirkama zadataka može se u odjeljku o nejednakostima i u vezi s našim problemom naći sljedeći zadatak:

Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijede nejednakosti

$$2\sqrt{n} - 2 < x_n < 2\sqrt{n} - 1. \tag{2}$$

Zadatak daje granice broja x_n. Ako nastavnik upozna učenike s ovim nejednakostima, težina polazne problemske situacije time se naravno snizila i učenicima preostaju dva prirodna koraka: dokazi nejednakosti (primjenom metode matematičke indukcije) i odgovor na gornje pitanje (izračunavanje brojeva $[x_{10000}] = 198$, $[x_{4008004}] = 4002$).

b) Razmotrimo polaznu problemsku situaciju. Pred učenicima je sada mnogo više nepoznanica. Prva od njih je teorijska osnova, tj. one teorijske činjenice koje su u najužoj vezi s uvjetima i ciljem zadatka i koje se otkrivaju dubljom analizom. Za to je potreban ozbiljan istraživački rad. Je li teško otkriti ideju i početni korak?

Ograničavanje broja x_n slijeva i zdesna u svrhu smanjivanja broja mogućnosti za broj $[x_n]$ javlja se prirodnom idejom, a to znači da teorijske činjenice treba potražiti u području nejednakosti. Ideja se dalje razvija ovako: treba pronaći dva izraza $A(n)$ i $B(n)$ koji ovise o prirodnom broju n, tako da je $A(n) < x_n < B(n)$ i da je razlika $B(n) - A(n)$ što je moguće manja. Sasvim je jasno da će se ovi uvjeti lakše ispuniti ako se najprije uspiju naći različite ocjene za izraz $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ne treba ići daleko, već treba taj broj usporediti s jednostavnim izrazima. Možda su to izrazi $\sqrt{n-1}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, koji se lako uočavaju i sami nameću?

Kritično mjesto analize su pomoćne nejednakosti koje povezuju te izraze. U našem slučaju izdvajamo, od više mogućnosti, sljedeće četiri pomoćne nejednakosti

$$\sqrt{n} > \sqrt{n-1}, \quad 2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n},$$
$$2\sqrt{n} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1},$$
$$2\sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

One su više-manje očigledne i "obećavaju". Pokazuje se da je to dobar izbor. Njihovim transformiranjem na oblike

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$
$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1},$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

mogu se za broj x_n lako izvesti nejednakosti

$$\sqrt{n} < x_n, \; 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < x_n,$$
$$x_n < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}, \; x_n < 2\sqrt{n} - 1.$$

Vratimo se našem problemu. Za zapis oblika $A(n) < x_n < B(n)$ imamo više mogućnosti. Najbolji je pomoću druge i četvrte nejednakosti, tj.

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < x_n < 2\sqrt{n} - 1. \quad (3)$$

Primijetimo da je lijeva granica bolja od nejednakosti (2) u gornjem zadatku, a bolja je i od granice $2\sqrt{n+1} - 2$, koja se navodi u nekim zbirkama.

Samostalno otkrivanje razmatranih i sličnih nejednakosti bio bi za učenike istinski matematički doživljaj i poticaj za nova otkrića. Nije jednostavno i lagano, ali je svakako pravi put dubljeg sagledavanja i učenja matematike. I primjerenao ostvarenje načela problemnosti.

* * *

Zaključak.

Načelo problemnosti mora postati jedno od vodećih načela nastave matematike. Primjenom toga načela nastavnik matematike može potisnuti prividnu jasnoću, upozoriti učenike na probleme koje oni ne uočavaju, doprinijeti razvoju matematičkog mišljenja i znatno poboljšati vrsnoću nastave matematike. Jasno je da će rezultati primjene ovog načela biti veći u višim razredima osnovne i srednje škole. Načelo problemnosti posebno dolazi do izražaja u nastavnom sustavu koji se naziva **problemska nastava**. O tome će u ovoj rubrici uskoro biti više riječi.

Literatura

[1] N. M. Beskin, *O nekim osnovnim principima predavanja iz matematike* (prijevod s ruskog), Matematika 2 (1985), 5–10.

[2] Z. Kurnik, *Suvremena metodika i nastava matematike*, Zbornik radova I. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, Zagreb 2000, 187–201.

[3] Z. Kurnik, *Matematički zadatak*, Matematika i škola 7 (2000), 51–58.

[4] Z. Kurnik, *Načelo znanstvenosti*, Matematika i škola 13 (2002), 102–106.

[5] V. A. Oganesjan i dr., *Metodika prepodavanija matematiki v srednej škole*, Prosveščenie, Moskva 1980.