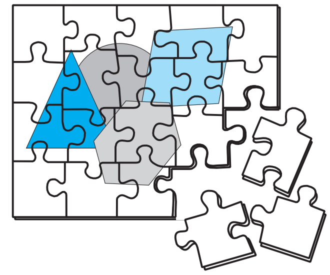
# Nadopuna lika



**Branimir Dakić, Zagreb**

Pri rješavanju matematičkih zadataka nastojimo razvijati i graditi sustavne postupke i metode kojima pristupamo problemima i koji nam pomažu pri njihovu rješavanju. Većina takvih postupaka su standardizirani, čisto *školski*, te ih obrađujemo u okviru redovitog nastavnog gradiva na način kako to predviđa udžbenik i standardna metodika nastave matematike. To su primjerice dokazi pomoću sukladnosti ili sličnosti, razne primjene trigonometrije u geometriji itd. No u neku su ruku sadržajniji, kreativniji i sa stanovišta didaktike produktivniji postupci koji izlaze iz okvira uobičajenog i standardnog; to su zapravo svojevrsne dosjetke koje se mogu razviti čak i u posebne metode. Takav je jedan lijep primjer *Gaussovo zbrajanje* kao i njegova geometrijska interpretacija.

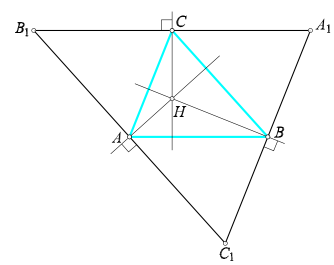
U ovom ćemo članku prikazati jedan jednostavan postupak koji se često primjenjuje u geometriji a koji smo nazvali **nadopuna lika**. Neki su nam primjeri dobro poznati iz geometrije ravnine. Tako se primjerice velik dio od nekoliko stotina dokaza *Pitagorina poučka* temelji na dopuni pravokutnog trokuta do kvadrata ili trapeza.

U nastavku ovog članka, koji pripremamo za sljedeći broj MiŠ-a, analogne ćemo ideje proširiti i na rješavanje nekih problema geometrije prostora.

Prikažimo sada na nekoliko primjera kako se dopuna lika koristi pri dokazima, prije svega nekih poučaka elementarne geometrije.

**Primjer 1.** *Teorem o ortocentru.* Pravci kojima pripadaju visine trokuta sijeku se u jednoj točki koja se zove ortocentar trokuta.

Ovaj se dokaz temelji na već dokazanoj činjenici da se simetrale stranica trokuta sijeku u jednoj točki, središtu trokutu opisane kružnice.



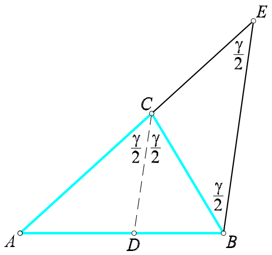

Povucimo vrhovima trokuta $\triangle ABC$ pravce paralelno njegovim stranicama. Ti pravci će zatvoriti novi trokut $\triangle A_1B_1C_1$. Točke $A$, $B$ i $C$ su polovišta stranica trokuta $\triangle A_1B_1C_1$. Stoga su pravci koji sadrže visine malog trokuta ujedno simetrale stranica velikog trokuta, a kako se simetrale stranica svakog trokuta sijeku u jednoj točki, onda se i pravci kojima pripadaju visine trokuta $\triangle ABC$ sijeku u toj istoj točki.

Time je ujedno dokazan i poučak.

**Primjer 2.** *Teorem o simetrali kuta trokuta.* Neka simetrala kuta $\gamma$ trokuta $\triangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki $D$. Tada vrijedi

$$|AD| : |DB| = |AC| : |BC|.$$

Postoji čitav niz vrlo elementarnih dokaza ovog poučka, ali jedan od ljepših je onaj u kojem se koristi sličnost, a u srednjoj školi još bolje i izravnije *Talesov teorem o proporcionalnosti u pramenu pravaca*.




Položimo točkom $B$ paralelan pravac simetrali $\overline{CD}$ i produžimo stranicu $\overline{AC}$ do sjecišta $E$ s tim pravcem.

Uočavamo da je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \sphericalangle CBE = \sphericalangle BEC = \dfrac{\gamma}{2}$.

Zaključujemo da je trokut $\triangle BEC$ jednakokračan, te je $|CE| = |CB| = a$.

Sada možemo primijeniti *Talesov poučak o proporcionalnosti* te je

$$|AD| : |DB| = |AC| : |CE| = |AC| : |CB|.$$

Zaključimo:

*Omjer duljina odsječaka na koje simetrala kuta trokuta siječe suprotnu stranicu jednak je omjeru duljina odgovarajućih stranica trokuta koje zatvaraju taj kut.*

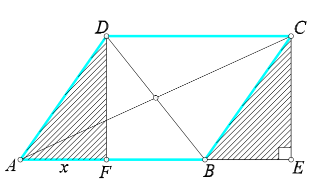
**Primjer 3.** Vrlo je poznata dopuna trokuta do paralelograma uz zadatke koji su vezani uz težišnice trokuta. Tada možemo jednostavnom i izravnom primjenom poznatog *Poučka o paralelogramu* lako povezati duljine težišnica i duljine stranica trokuta.

*Poučak o paralelogramu glasi*: Ako su $a$ i $b$ duljine stranica paralelograma, a $e$ i $f$ duljine njegovih dijagonala, tada vrijedi jednakost:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Riječima, zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak je zbroju kvadrata duljina svih njegovih stranica.

Postoji više jednostavnih dokaza ovog poučka a mi prikažimo jedan u kojem se primjenjuje *Pitagorin poučak*.




Neka je dan paralelogram $ABCD$ i neka je $|AB| = |CD| = a$ te $|AD| = |BC| = b$. Neka je još $|AC| = e$ i $|BD| = f$.

Položimo okomice iz vrhova $C$ i $D$ na pravac $AB$ te sa $E$ i $F$ označimo nožišta tih okomica. Pravokutni trokuti $\triangle AFD$ i $\triangle BEC$ su sukladni. Označimo još $|DF| = |CE| = v$ i $|AF| = |BE| = x$.

Iz trokuta $\triangle FBD$ slijedi:

$$e^2 = v^2 + (a - x)^2.$$

Iz trokuta $\triangle AEC$ imamo:

$$f^2 = v^2 + (a + x)^2.$$

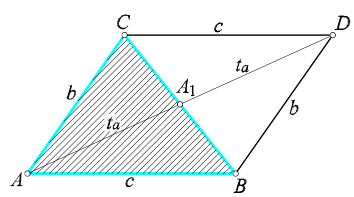
Kad ove dvije jednakosti zbrojimo, dobijemo: $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2(x^2 + v^2)$, a odatle, jer je $x^2 + v^2 = b^2$ slijedi

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

**Primjer 4.** Izračunajmo duljine težišnica trokuta $\triangle ABC$, ako su zadane duljine $a$, $b$ i $c$ stranica trokuta.

Nacrtajmo trokut $\triangle ABC$ i neka je $A_1$ polovište stranice $\overline{BC}$. Produžimo težišnicu $\overline{AA_1}$ do točke $D$ tako da je $A_1$ polovište dužine $\overline{AD}$. Prema opisanoj konstrukciji dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ se raspolavljaju pa su točke $A$, $B$, $D$ i $C$ vrhovi paralelograma. Ispunjeni su dakle uvjeti za primjenu *Poučka o paralelogramu*:

$$(2t_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2).$$




Ovu jednakost možemo zapisati u obliku

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Time je zadatak riješen. Duljine ostalih dviju težišnica dobit će se iz ove jednakosti cikličkom zamjenom.

No važno je uvijek isticati suštinu dobivenog rezultata, manje njegovu formu, premda dobro gledanje na formu otkriva i pravi rezultat. Drugim riječima, dobiveni rezultat je neovisan o izboru oznaka za duljine stranica i težišnice, on načelno govori o tome kako se izračunava duljina neke (bilo koje) težišnice ako su zadane duljine stranica trokuta.

Zanimljivo je sada potražiti rješenje obrnutog zadatka: *Neka se izračunaju duljine stranica trokuta, ako su zadane duljine svih triju njegovih težišnica.*

Rješenje ovog zadatka je nadohvat ruke, valja riješiti sustav jednadžbi

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$
$$4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$
$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Riječ je u suštini o linearnom sustavu s nepoznanicama $a^2$, $b^2$ i $c^2$. I ovakvi sustavi se rješavaju malim dosjetkama. Bit će korisno prikazati jedno lijepo rješenje.

Zbrojimo sve tri jednadžbe i dobijemo jednakost $4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Zbrojimo li sada druge dvije jednadžbe sustava, imat ćemo $4t_b^2 + 4t_c^2 = 4a^2 + b^2 + c^2$, a odatle uzmemo $a^2 + b^2 + c^2 = 4t_b^2 + 4t_c^2 - 3a^2$ i uvrstimo u gornju jednadžbu. Tako ćemo dobiti $4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(4t_b^2 + 4t_c^2 - 3a^2)$.

Iz ove posljednje jednadžbe lako se sada izračuna

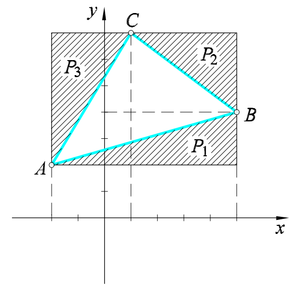
$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2t_b^2 + 2t_c^2 - t_a^2}.$$

Time smo obavili i ovaj posljednji zadatak.

Dobro je uočiti kako je ovo povezivanje trokuta i paralelograma prava mala metodičko-didaktička minijatura. Koliko se samo pritom prođe i poveže lijepih i korisnih činjenica da bi se sve zaokružilo u jednu cjelinu. Ovakve prigode javljaju se u raznim situacijama. Nerijetko se u nastavi matematike nakon nekog obrađenog gradiva rješavaju nizovi zadataka s nejasnom svrhom i ciljem. No, valja imati na umu kako je i vježbanje sastavni dio obrade matematičkih sadržaja, često znatno metodički složeniji nego li je samo izvođenje neke činjenice. Samim tim priprema za sat vježbanja obično zahtijeva više vremena i promišljanja.

**Primjer 5.** Izračunajmo površinu trokuta $\triangle ABC$ čiji su vrhovi točke $A(-2, 2)$, $B(5, 4)$ i $C(1, 7)$.

Ovaj će primjer malo odudarati od prethodnih, ali upravo je to razlog zbog kojega ga navodimo. Zadatak je moguće bez teškoća riješiti već u VII. razredu osnovne škole pri obradi koordinatnog sustava u ravnini. Tamo smo ionako skučeni u mogućnosti izbora primjerenih problema.




Evo jednog lijepog rješenja zadatka bez uporabe formule.

Povucimo vrhovima $A$ i $C$ trokuta paralele s osi apscisa, a vrhovima $A$ i $B$ paralele s osi ordinata. Tako smo zatvorili pravokutnik površine 35 kvadratnih jedinica. Kad od površine tog pravokutnika oduzmemo površine $P_1$, $P_2$ i $P_3$ triju iscrtanih pravokutnih trokuta dobit ćemo površinu trokuta $\triangle ABC$.

Imamo redom:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 = 7 \text{ kv. jed.}$$
$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ kv. jed.}$$
$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7.5 \text{ kv. jed.}$$

I sada je $P = 35 - (7 + 6 + 7.5) = 14.5$ kv. jed.

Ovim postupkom mogli bismo bez problema izvesti poznatu formulu za površinu trokuta koji je zadan koordinatama svojih vrhova:

$$P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

U sljedećem broju nastavit ćemo na istu temu ali u prostoru.