Problemska nastava

Zdravko Kurnik, Zagreb

Suvremena metodika nastave matematike ukazuje na razne mogućnosti za rješavanje jednog od najvažnijih pitanja suvremene nastave matematike, **pitanja razvoja stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika.**

Važne elemente rješavanja ovog pitanja nastavnik matematike može naći već u samim načelima nastave matematike, zatim u nastavnim i znanstvenim metodama koje se primjenjuju u nastavnom procesu, a rješenja treba tražiti i u izboru postojećih nastavnih sustava. To su: predavačka nastava, demonstraciona nastava, heuristička nastava, programirana nastava, egzemplarna nastava, problemska nastava, mentorska nastava i dr.

Sva su načela usko povezana, sve nastavne metode i svi nastavni sustavi imaju svoje mjesto u nastavi. Međutim, za nastavu matematike i rješavanje navedenog pitanja posebno su važni **načelo problemnosti i problemska nastava.** Načelo problemnosti, koje se primjereno i u punoj mjeri ostvaruje upravo u problemskoj nastavi, opisano je u prošlom broju MŠ-a (v. [9]). Ovdje će biti više riječi o samom nastavnom sustavu.

Osnovu za primjenu problemske nastave daju tri važna pojma: problem, problemska situacija i načelo problemnosti. Opišimo još na početku prva dva pojma.

Problem i problemska situacija

U mnogim djelatnostima ljudi svakodnevno dolaze u različite problemske situacije sa stanovitim proturječnostima koje moraju znati i umjeti razriješiti. Također svakodnevno niču novi problemi, tako da ta riječ ljudima i nije više strana. Pridaju joj mnoga značenja.

Riječ *problem* izvorno je grčkog porijekla i znači: *teorijsko ili praktično pitanje koje treba riješiti, sporno pitanje, teškoća, težak zadatak, zadaća uopće, zagonetka.*

Problemske situacije i problemi pojavljuju se i u školi, ali nas posebno zanimaju one problemske situacije koje u nastavnom procesu stvara sam nastavnik matematike s posve određenim ciljem. Taj cilj je povišenje efikasnosti nastave matematike i podizanje razine matematičkog obrazovanja učenika.

Pred nastavnikom je obrada nekog problema. On treba najprije pobuditi interes stvaranjem problemske situacije koja je primjerena predznanju i sposobnostima učenika. To se može učiniti na sljedeće načine:

I. Nastavnik jasno i precizno postavlja problem učenicima.

II. Nastavnik stvara situaciju u kojoj se od učenika zahtijeva da sami shvate i formuliraju problem koji se u toj situaciji nalazi.

III. Nastavnik stvara situaciju s više ili manje jasno naznačenim problemom koji tijekom analize treba učenike dovesti do novog problema, koji je on predvidio.

IV. Nastavnik stvara situaciju s više ili manje jasno naznačenim problemom koji tijekom analize učenike dovodi do novog problema, koji on nije u potpunosti predvidio.

Prvi način je najjednostavniji, u ostalim ima više nepoznanica, a posebno je vrijedan posljednji način stvaranja problemske situacije, jer je u njoj bar jedna komponenta nepoznata i samom nastavniku, a rad učenika je kreativan i stvaralački.

Ovdje je dobro podsjetiti se da problemska situacija ima iste komponente kao i matematički zadatak: *objekti, poznate i nepoznate veličine, uvjeti, svojstva, odnosi, veze, faze* i dr. (v. [6]).

Problemska nastava

Problemske situacije i problemi s kojima će se novi naraštaji mladih sresti u životu i svom radu stavljaju školu pred ozbiljan zadatak da učenike primjereno pripremi za takav rad. Nije dovoljno samo prenošenje određenih znanja učenicima, pa ni snalaženje u problemskim situacijama i uočavanje i formuliranje problema, već je potrebno učenike osposobiti za **rješavanje problema**. Kako to postići? Najbolji odgovor na ovo pitanje je poseban nastavni sustav – **problemska nastava.**

Ideja problemske nastave, učenja putem rješavanja problema, nije nova, ali je ona u nastavnoj praksi prilično zapostavljena. Dominiraju slabiji nastavni sustavi, znanje se najčešće pasivno usvaja a ne aktivno osvaja. Suvremena nastava matematike postavlja u tom pogledu jače zahtjeve. Na nastavnom satu učenici trebaju aktivno i samostalno raditi, istraživati, rješavati probleme za koje je potrebno pokazivanje njihovih različitih matematičkih sposobnosti.

Problemska nastava je suvremen, ali viši nastavni sustav. Ta činjenica odmah upozorava da je on teži i učenicima i nastavnicima matematike od drugih nastavnih sustava.

Učenicima je on težak zato što samostalno rješavanje problema nije ni jednostavno, ni lako. To se najbolje vidi na matematičkim natjecanjima gdje se često i naši najbolji učenici ne snalaze dobro u rješavanju nestandardnih i problemskih zadataka. Prva bitna pretpostavka za uspješnu primjenu problemske nastave je da su **učenici primjereno osposobljeni za umni rad** (pravilan izbor izvora za proučavanje, izdvajanje potrebnih teorijskih činjenica, misaono prorađivanje, postavljanje i provjeravanje hipoteza, jezično oblikovanje i zapis rezultata rada i dr.). Sposobnost umnog rada postiže se postupno. Ona se razvija i u drugim nastavnim sustavima (misaono praćenje u predavačkoj nastavi, misaono vođenje u heurističkoj nastavi, samostalni rad u programiranoj nastavi), ali se tek u problemskoj nastavi postiže najpovoljniji razvoj. Zato tu nastavu treba primjenjivati na svim razinama matematičkog obrazovanja, uvažavajući pri tome dob, psihički razvoj i stvarne matematičke sposobnosti učenika.

Iako se poučavanje nastavnika matematike u problemskoj nastavi znatno smanjuje, ovaj nastavni sustav relativno je težak i za nastavnika. Uloga nastavnika u njemu sastoji se u savjetovanju i pomaganju učenika pri izboru izvora, ukazivanju na potrebne teorijske činjenice i završnoj raspravi o rezultatima samostalnog rada učenika. Tu se mogu pojaviti i postavke učenika koje nastavnik nije predvidio. Na takvu situaciju on mora biti pripravan. Zato je druga bitna pretpostavka za primjenu problemske nastave **dobra osposobljenost nastavnika matematike.**

Metodika organizacije problemske nastave

S obzirom na značajke problemske nastave i težinu koju ona nosi, metodika nastave matematike razradila je sljedeću shemu na osnovi koje se oblikuje i priprema nastavni sat u ovom nastavnom sustavu:

1. Stvaranje nastavne problemske situacije. Cilj nastavnika je buđenje interesa učenika za novi nastavni sadržaj i motiviranje potrebe njegove obrade. Koji će oblik problemske situacije on odabrati, ovisi o predznanju i matematičkim sposobnostima učenika.

2. Postavljanje problema koji niče iz dane problemske situacije.

3. Proučavanje uvjeta. Učenici trebaju analizirati problemsku situaciju i otkriti način rješavanja postavljenog problema. Pretpostavlja se da dobro znaju teorijske činjenice potrebne za to rješavanje.

4. Rješavanje postavljenog problema. Ovo je najsloženiji dio u čitavom procesu. U njemu se detaljno ostvaruje zamišljeni način rješavanja i utvrđuje ispravnost svakog provedenog koraka. Rješavanje učenici u pravilu izvode samostalno. Nastavnik samo usmjerava rad, a rjeđe navodi na ideju.

5. Razmatranje dobivenog rješenja i iskazivanje novog znanja.

6. Proučavanje dobivenog rješenja i traženje drugih načina rješavanja.

7. Proučavanje mogućih proširenja i poopćenja postavljenog problema.

8. Zaključci izvršenog rada. Dijalog učenika i nastavnika. Razmatranje mogućnosti primjene novog znanja.

Ovu shemu ne treba shvatiti kruto, već kao dinamičan proces koji se može djelomice mijenjati od problema do problema. Neki koraci mogu se objediniti, a neki ponekad i ispustiti.

Svi matematički sadržaji nose u sebi stanovitu problemnost. Zato je moguće pri obradi svakog sadržaja stvoriti najprije prikladnu problemsku situaciju i učenike staviti pred neki problem. Hoće li se u daljnjem radu problem u potpunosti obrađivati primjenom problemske nastave ili će se rad kombinirati s drugim oblicima i nastavnim metodama, ovisi o težini matematičkog sadržaja, uzrastu i predznanju učenika i umješnosti nastavnika. Već samo postavljanje problemske situacije na jedan od gore navedenih načina znači dobar početak.

U [9] opisani su načini postavljanja različitih problemskih situacija pri obradi dviju nastavnih jedinica, Pitagorinog poučka (8. razred OŠ) i svojstava rješenja kvadratne jednadžbe (2. razred SŠ).

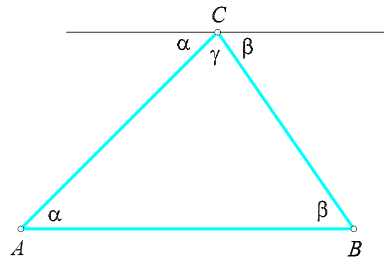
Problemska nastava primjerenija je višem uzrastu učenika, ali moguća je njezina primjena i ranije. Evo primjera.

Primjer 1. *Zbroj kutova u trokutu.*

1) U nekim udžbenicima ova nastavna jedinica odmah počinje preciznim postavljenjem problema:

"Pokažimo da je zbroj kutova u trokutu jednak 180°."

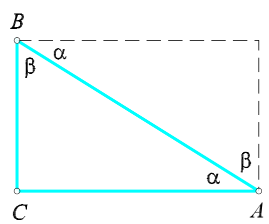
Slijedi izrada donjeg pomoćnog crteža i dokaz zasnovan na odnosu kutova uz presječnicu paralelnih pravaca. Ovaj postupak nije najbolje motiviran i učenici su pri obradi pasivni.

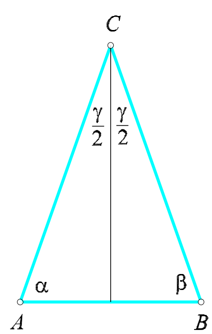


2) Učitelj može problemsku situaciju produbiti na temelju činjenica da učenici znaju da su sva četiri kuta pravokutnika prava i da visina jednakokračnog trokuta dijeli kut uz isti vrh na dva jednaka dijela. Sada stvara ovu problemsku situaciju:

"Promatrajte pravokutni i jednakokračni trokut. Nađite zbrojeve kutova u tim trokutima i ispitajte što se može reći o zbroju kutova u bilo kojem trokutu."

Teško da bi učenici šestog razreda mogli potpuno samostalno razriješiti ovu problemsku situaciju. Zato je ovdje od problemske nastave pogodnija heuristička nastava. Heuristička nastava je jednostavniji nastavni sustav, zasniva se na aktivnosti učenika i vođenju nastavnika, a sadrži i elemente problemske nastave.





Učitelj će vođenjem navesti učenike da u prvom koraku pravokutni trokut nadopune do pravokutnika, uoče par paralelnih pravaca i njihovu presječnicu te kutove uz nju i zaključe da je zbroj kutova u pravokutnom trokutu jednak 180° ($\alpha + \beta = 90°$, $\alpha + \beta + 90° = 180°$).

Sljedeći korak je promatranje jednakokračnog trokuta. Visina toga trokuta dijeli ga na dva sukladna pravokutna trokuta. To znači da se može primijeniti prethodni rezultat i doći do zaključka da je i u svakom jednakokračnom trokutu zbroj kutova jednak 180° ($\alpha + \dfrac{\gamma}{2} = 90°$, $2\alpha + \gamma = 180°$).

Kao treći korak učenici mogu promatrati konkretan trokut i pomoću kutomjera odrediti njegove kutove. Ustanovili bi da je i zbroj njegovih kutova 180°.

Na temelju provedenih koraka učenici dolaze do tvrdnje:

Zbroj kutova u svakom trokutu jednak je 180°.

Dokaz teče kao u 1), ali se i on može poboljšati tako da se učenike misaono vodi da sami dođu do pomoćnog crteža. Nema sumnje da je ovaj drugi način obrade mnogo bolji za razvoj mišljenja učenika ovog uzrasta.

* * *

U srednjoj školi problemska nastava može se češće primjenjivati. Učenici su zreliji, imaju veće predznanje, no ni tu stvaranje problemskih situacija nije uvijek lako. Primjena će biti uspješnija ako se nova problemska situacija dade povezati s nekom ranije razmatranom problemskom situacijom. Posebno jako sredstvo povezivanja je **analogija**. Pogledajmo to u sljedećem primjeru.

Primjer 2. *Elipsa i hiperbola.*

Obrade ovih nastavnih jedinica u trećem razredu srednje škole imaju mnogo sličnosti. Zato nakon obrade elipse učenici mogu uz malu pomoć nastavnika neke činjenice o hiperboli samostalno izvesti.

a) Slične su već i same definicije krivulja:

Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke ravnine i $2a$ pozitivan realan broj veći od $|F_1F_2|$. Skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka F_1 i F_2 stalan i jednak $2a$ zove se *elipsa*.

Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke ravnine i $2a$ pozitivan realan broj manji od $|F_1F_2|$. Skup svih točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od točaka F_1 i F_2 stalna i jednak $2a$ zove se *hiperbola*.

Za samostalni rad učenika pogodna je konstrukcija hiperbole.

b) Kako se izvodi jednadžba elipse? Elipsa se smješta u koordinatni sustav tako da joj je središte O u ishodištu koordinatnog sustava, a osi na koordinatnim osima.

Prema definiciji elipse, za udaljenosti r_1 i r_2 bilo koje njezine točke $T(x, y)$ od žarišta $F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$ vrijedi

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

odnosno

$$\sqrt{(x+e)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-e)^2+(y-0)^2}=2a.$$

Iz ove jednakosti izvodi se jednadžba elipse u obliku $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Sasvim analogno izvodi se jednadžba hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Zato izvođenje jednadžbe hiperbole nastavnik može postaviti kao problemsku situaciju koju, poznavajući postupak izvođenja jednadžbe elipse, učenici mogu i znaju samostalno razriješiti.

c) Uvjet diranja pravca $y = kx + l$ i elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ dobiva se rješavanjem tog sustava jednadžbi uz zahtjev da je presjek krivulja jedna točka. Rezultat je jednakost $a^2k^2 + b^2 = l^2$.

Sasvim analogno izvodi se uvjet diranja $a^2k^2 - b^2 = l^2$ pravca $y = kx + l$ i hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, što znači da je i izvođenje toga uvjeta pogodno za samostalni rad učenika.

d) Jednadžba $b^2xx_0 - a^2yy_0 = a^2b^2$ tangente na hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ u njenoj točki $T_0(x_0, y_0)$ izvodi se analogno kao jednadžba $b^2xx_0 + a^2yy_0 = a^2b^2$ tangente na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ u njenoj točki $T_0(x_0, y_0)$. Dakle, i taj je odjeljak pogodan za primjenu problemske nastave.

* * *

Evo još nekih tema iz školske matematike koje su u potpunosti ili djelomično pogodne za obradu primjenom problemske nastave:

(OŠ) *Djeljivost prirodnih brojeva, zbroj kutova u trokutu, rješavanje sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, dijagonale n-terokuta, zbroj kutova n-terokuta, Talesov poučak, kvadriranje i njegova svojstva, korjenovanje i njegova svojstva, Pitagorin poučak, primjena Pitagorina poučka.*

(SŠ) *Površina trokuta i Heronova formula, teoremi o sličnosti trokuta, analitička formula za površinu trokuta, svojstva potencija, rastavljanje polinoma na faktore, svojstva korijena, svojstva rješenja kvadratne jednadžbe, bikvadratna jednadžba, kvadratna funkcija $f(x) = ax^2$, graf inverzne funkcije, težišnice i težište trokuta, udaljenost točke od pravca, adicioni teoremi, Newtonova binomna formula, aritmetički niz, geometrijski niz, geometrijski red, pravila deriviranja, derivacije elementarnih funkcija.*

Obrada tih tema bit će uspješnija ako se poznaju i u nastavi matematike češće primjenjuju znanstveni postupci kao što su analiza, analogija, indukcija i generalizacija (v. [1], [2], [3], [4]).

Ako se već problemska nastava ne može, zbog svoje složenosti i težine, primjenjivati pri obradi dobrog dijela nastavnih sadržaja, poželjno je da nastavnik matematike učenicima, ili bar naprednijim učenicima, češće postavlja problemske zadatke i njeguje stvaranje različitih problemskih situacija. Razmotrimo podrobnije jedan takav problemski zadatak.

Primjer 3. *Pravokutnici zadanog opsega.*

Gdje je tu problem? On se pojavljuje onog trenutka kad se osim opsega u razmatranje uzme i površina pravokutnika. Tada se prirodno nameće pitanje: ako je opseg pravokutnika čvrst broj, što se može reći o površini pravokutnika?

1) Imajući na umu gornje pitanje, nastavnik postavlja sljedeću problemsku situaciju:

"Promatrajte skup pravokutnika zadanog opsega O. Svaki od njih ima i određenu površinu P. Ispitajte odnos veličina O i P."

Što sve nastavnik ovdje predviđa? Najprije, nastavnik očekuje da razrješavanje ove problemske situacije njegovi učenici počnu promatranjem konkretnih slučajeva pravokutnika i da će se među njima nalaziti i kvadrat. Rezultat treba biti tvrdnja koja izražava ekstremalno svojstvo kvadrata. Zatim, znajući da se tvrdnja može dokazati na više načina i da se u jednom dokazu pojavljuje i dodatni problem koji treba posebno razmotriti, nastavnik očekuje od učenika pri dokazivanju tvrdnje različite ideje i kreativnost. Na kraju, ne treba zanemariti činjenicu da neki učenici mogu krenuti i putem poopćavanja ove problemske situacije. Pogledajmo redom korake misaonog procesa.

a) Neka je konkretno opseg pravokutnika $O = 12$ i duljine stranica nekoliko pravokutnika s tim opsegom 1 i 5, 2 i 4, $\frac{7}{2}$ i $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{17}{3}$, $\frac{8}{5}$ i $\frac{22}{5}$. Tada su površine tih pravokutnika 5, 8, $\frac{35}{4}$, $\frac{17}{9}$, $\frac{176}{25}$. S druge strane, duljina stranice kvadrata s opsegom 12 jednaka je 3, a njegova površina 9. Usporede li se dobivene površine, odmah se vidi da je površina kvadrata najveća. To je za učenika važan trenutak, trenutak "otkrića". Oni su došli do nove spoznaje koja se može izreći u obliku tvrdnju:

Od svih pravokutnika zadanog opsega najveću površinu ima kvadrat.

b) *Prvi dokaz.* Neka su a i b duljine stranica pravokutnika. Tada je $O = 2a + 2b$, a njegova površina P_1 je $P_1 = ab$. Duljina stranice kvadrata koji ima isti opseg jednaka je $\frac{O}{4}$, a njegova površina $P_2 = \frac{O}{4} \cdot \frac{O}{4} = \left(\frac{O}{4}\right)^2 = \left(\frac{2a+2b}{4}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{4}\right)^2$.

Sada se vidi da je za dokaz tvrdnje potrebna veza između aritmetičke sredine $\frac{a+b}{2}$ i geometrijske sredine $\sqrt{ab}$ pozitivnih realnih brojeva a i b.

Učenici naslućuju da vrijedi pomoćna tvrdnja:

Za pozitivne realne brojeve a i b aritmetička i geometrijska sredina povezane su nejednakošću

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Ukoliko oni ovu činjenicu poznaju, mogu odmah prijeći na dokaz prve tvrdnje, a ako im je ona nepoznata, onda je trebaju shvatiti kao **novi problem**. U tom slučaju nužno je provesti dokazivanje te tvrdnje (v. [4]).

Dokaz prve tvrdnje tada teče ovako:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \implies \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$
$$\implies \left(\frac{O}{4}\right)^2 \geq ab \implies P_2 \geq P_1.$$

c) *Drugi dokaz.* Sasvim bi bilo prirodno da učenici krenu ovim smjerom:

Neka je x duljina jedne stranice pravokutnika opsega O. Duljina druge stranice je tada $\frac{O}{2} - x$. Za površinu P dobiva se

$$P = x\left(\frac{O}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{O}{2}x = -\left(x - \frac{O}{4}\right)^2 + \frac{O^2}{16}.$$

Površina P je najveća, i to $\frac{O^2}{16}$, ako je $x = \frac{O}{4}$. A to je duljina stranice kvadrata opsega O.

Učenici srednje škole ovdje prepoznaju kvadratnu funkciju i tvrdnju dokazuju traženjem maksimuma te funkcije.

d) *Treći dokaz.* Ovaj dokaz osniva se na primjeni metode razlikovanja slučajeva. Neka su a i b duljine stranica pravokutnika. Vrijedi jednakost $a + b = \frac{O}{2}$. Za veličinu a mogu se razlikovati tri slučaja: $0 < a < \frac{O}{4}$, $a = \frac{O}{4}$, $\frac{O}{4} < a < \frac{O}{2}$.

U prvom slučaju postoji pozitivni broj x takav da je $a = \frac{O}{4} - x$, pa je $b = \frac{O}{4} + x$ i površina pravokutnika $P = \frac{O^2}{16} - x^2$.

U drugom slučaju je i $b = \frac{O}{4}$, pa je $P = \frac{O^2}{16}$.

U trećem slučaju postoji pozitivni broj y takav da je $a = \frac{O}{4} + y$, pa je $b = \frac{O}{4} - y$ i površina pravokutnika $P = \frac{O^2}{16} - y^2$.

Vidi se da je površina P najveća u drugom slučaju, a to je upravo slučaj kvadrata.

2) Nastavnik može prema potrebi pojednostavniti problemsku situaciju na početku tako da odmah iskaže tvrdnju:

Od svih pravokutnika zadanog opsega najveću površinu ima kvadrat.

Nakon toga učenicima preostaje dokaz tvrdnje i od njih se opet mogu očekivati koraci b), c) i d). U praksi je ovakav pristup češći. To je šteta, jer su koraci kao što je korak a) važni u procesu spoznaje.

3) Napredniji učenici mogu se prisjetiti da pravokutnik i kvadrat u ravnini imaju svoje analogone kvadar i kocku u prostoru. Tada nije daleko pomisao da oni sami stvore novu problemsku situaciju:

"Promatrajmo skup kvadara u prostoru zadanog oplošja O. Svaki od njih ima i određeni obujam V. Treba ispitati odnos veličina O i V."

Ili konkretnije:

"Razmotrimo tvrdnju: od svih kvadara zadanog oplošja najveći obujam ima kocka."

Već formuliranje ove tvrdnje primjenom analogije vrijedno je za razvoj matematičkog mišljenja učenika. Sve dodatno što bi učenici još mogli izvesti ukazivalo bi na njihovo brzo napredovanje.

Nešto kao zaključci

Nastavni sat nije uspješan u suvremenom smislu ako na njemu učenici ne rade aktivno i samostalno, ako ne rješavaju probleme. Ovaj zahtjev primjereno se ostvaruje u problemskoj nastavi.

Problemska nastava ima niz dobrih strana. Izdvajamo one najbolje: veća motiviranost učenika, primjerena mogućnost suradnje, istraživački pristup rješavanja problema, razvoj kritičkog mišljenja, bolje shvaćanje biti i zakonitosti, povećanje količine znanja, stečena znanja su trajnija, veća primjenjivost stečenih znanja.

Problemska nastava je zahtjevan nastavni sustav. Zbog složenosti i težine za njezinu primjenu treba više vremena. Zato je razumljivo da se problemska nastava ne može primjenjivati na svakom nastavnom satu, već je za tu svrhu potrebno načiniti uži i primjereni izbor matematičkih sadržaja, a za obradu tih sadržaja i vrsnu pripremu.

Rješavanje problemskih zadataka dobar je način postupnog uvođenja problemske nastave u nastavu matematike.

Literatura

[1] Z. Kurnik, *Analiza*, Matematika i škola 2 (1999), 54–64.
[2] Z. Kurnik, *Analogija*, Matematika i škola 3 (2000), 101–109.
[3] Z. Kurnik, *Generalizacija*, Matematika i škola 4 (2000), 147–154.
[4] Z. Kurnik, *Indukcija*, Matematika i škola 5 (2000), 197–203.
[5] Z. Kurnik, *Suvremena metodika i nastava matematike*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, Zagreb 2000, 187–201.
[6] Z. Kurnik, *Matematički zadatak*, Matematika i škola 7 (2000), 51–58.
[7] Z. Kurnik, *Matematičke sposobnosti*, Matematika i škola 10 (2001), 195–199.
[8] Z. Kurnik, *Načelo znanstvenosti*, Matematika i škola 13 (2002), 102–106.
[9] Z. Kurnik, *Načelo problemnosti*, Matematika i škola 14 (2002), 148–152.
[10] S. Medved, *Problemska nastava*, diplomski rad, Zagreb 1996.
[11] V. A. Oganesjan i dr., *Metodika prepodavanija matematiki v srednej škole*, Prosveščenije, Moskva 1980.
[12] *Standardi za nastavu matematike*, Matkina biblioteka, HMD i V. gimnazija, Zagreb 2000.