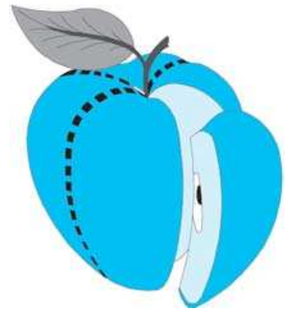


Nadopuna tetraedra

Branimir Dakić, Zagreb

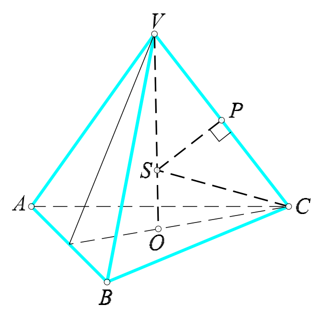
Trostrana piramida je geometrijsko tijelo analogno trokutu u ravnini. Postoje mnoge lijepe usporedbe ovih geometrijskih figura i one su vrlo poticajne i uvjerljive za postavljanje i provjeravanje raznih tvrdnji o trostranoj piramidi koje su motivirane točnim i već dokazanim analognim tvrdnjama za trokut*.

Već i u samoj definiciji trokuta i trostrane piramide nalazimo smisao za njihovo povezivanje. *Trokut* je najmanji konveksni skup ravnine koji sadrži tri nekolinearne točke. A *trostrana piramida* je najmanji konveksni skup (trodimenzionalnog) prostora koji sadrži četiri nekomplanarne točke.

No analogije između trokuta i trostrane piramide ne sastoje se samo u poopćenju izvjesnih činjenica već su ponekad analogni i postupci kojima se koristimo pri provjeri tvrdnji. Ovdje ćemo opisati jedan takav postupak u kojem se rješavanje nekog zadatka vezanog uz trostranu piramidu provodi dopunom piramide. Ta je zamisao motivirana dopunom trokuta do paralelograma kojom se rješavaju razni zadaci vezani uz trokut (vidi MŠ 14).

Zadatak 1. Kolika je duljina polumjera sfere opisane pravilnoj trostranoj piramidi?

Uzmimo da su duljine svih bridova piramide jednake a. Promatra se presjek te piramide ravninom koja prolazi jednim bočnim bridom $(\overline{CV})$ i visinom piramide $(\overline{VO})$, gdje je O nožište te visine na strani $\triangle ABC$ piramide. Neka je S središte opisane sfere danoj piramidi. Tada je duljina polumjera sfere jednaka $r = |SC| = |SV|$.



Trokut $\triangle SCV$ je jednakokračan, točka P polovište je njegove osnovice $\overline{CV}$. Iz sličnosti trokuta $\triangle OCV$ i $\triangle SPV$ postavljamo razmjer $|OV| : |CV| = |PV| : |SV|$.

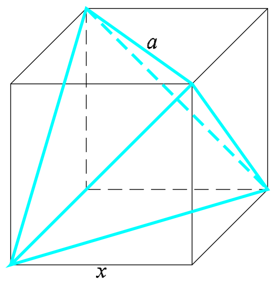
Kako je $|CO| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, onda je $|OV| = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, pa se iz prethodnog razmjera dobije $r = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

* B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

Nije baš jednostavno, mora se priznati.

Pogledajmo sada kako se ovaj zadatak može riješiti znatno *elegantnije*.

Zamislimo da je pravilni tetraedar s bridom duljine a smješten u kocku onako kako je to prikazano na slici. Bridovi tetraedra dijagonale su strana kocke. Sfera opisana tetraedru ista je kao i ona opisana kocki. Njezin je polumjer jednak polovini prostorne dijagonale kocke.



Ako s x označimo duljinu brida kocke, tada je $r = \dfrac{1}{2}x\sqrt{3}$. No kako je $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, to je

$$r = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

I zadatak je riješen.

Dopunom pravilnog tetraedra do kocke lako ćemo riješiti i niz drugih zadataka:

— *dokazati da su mimosmjerni bridovi pravilnog tetraedra međusobno okomiti;*

— *odrediti udaljenost mimosmjernih bridova pravilnog tetraedra;*

— *odrediti polumjer sfere koja dira sve bridove pravilnog tetraedra.*

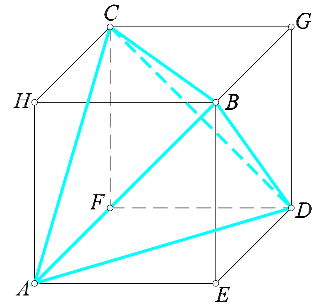
Zadatak 2. Koliki je obujam pravilnog tetraedra ako je duljina svakog njegovog brida jednaka a?

Ako smo već izračunali duljinu visine pravilnog tetraedra $v = |OV| = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot a$, onda možemo lako izračunati i obujam te piramide:

$$V = \frac{1}{3}B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

No pogledajmo i sljedeći postupak.

I opet smjestimo tetraedar u kocku na već opisan način.



Kako bismo dobili obujam tetraedra, od obujma kocke valja nam oduzeti obujmove četiriju sukladnih *pravokutnih* piramida *ABDE*, *BCDG*, *ABCH* i *ADCF*.

Uz oznaku x za duljinu brida kocke sada računamo:

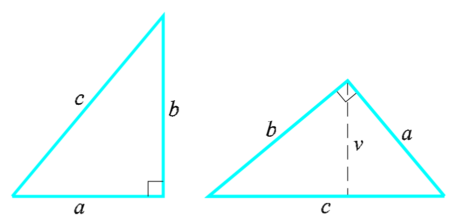
$$V = x^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{2} = x^3 - \frac{2}{3}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

Primjećujemo da je obujam pravilnog tetraedra jednak trećini obujma kocke u koju je upisan.

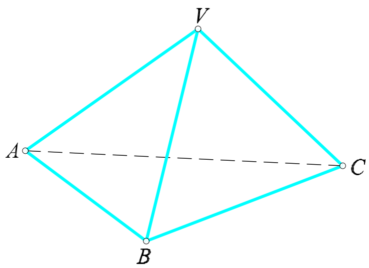
I sada uz $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ imamo

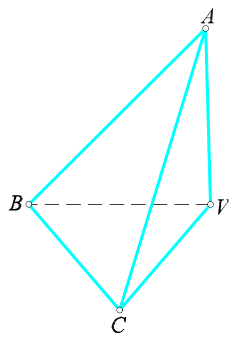
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Kad računamo površinu pravokutnog trokuta, jednu njegovu katetu uzmemo za osnovicu pa je druga kateta onda visina tog trokuta. To je spretnije nego kad je osnovica trokuta hipotenuza.



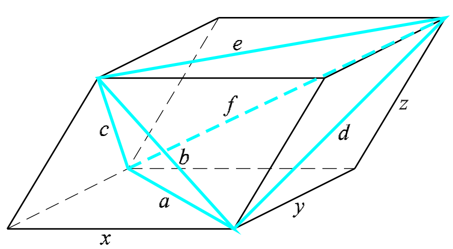
Na analogan način smo odredili i obujam svake od četiri piramide koje su "odrezane" od kocke. Svaka od njih ima jedan vrh iz kojega izlaze tri brida. Svaka dva od ta tri brida zatvaraju pravi kut, dakle, tri strane piramide su pravokutni trokuti. Pa kad se piramida polegne na neku od njih, visina piramide je jednaka duljini brida koji je zajednički dvjema ostalim pravokutnim stranama. Tako je lagano izračunati obujam piramide.





Zadatak 3. Dokaži da je zbroj kvadrata duljina bridova trostrane piramide jednak četverostrukom zbroju kvadrata udaljenosti polovišta njegovih mimoilaznih bridova.

U ovom je zadatku riječ o potpuno općenitoj piramidi, svi su njezini bridovi različite duljine. Takvu ćemo piramidu smjestiti u paralelepiped, prizmu čije su sve strane paralelogrami.



Tada su bridovi tetraedra dijagonale strana paralelepipeda pa uzastopnom primjenom relacije paralelograma dobivamo tri sljedeće jednakosti [**]:

$$a^2 + e^2 = 2(x^2 + y^2),$$
$$b^2 + f^2 = 2(x^2 + z^2),$$
$$c^2 + d^2 = 2(y^2 + z^2).$$

Kad ih zbrojimo, dobit ćemo

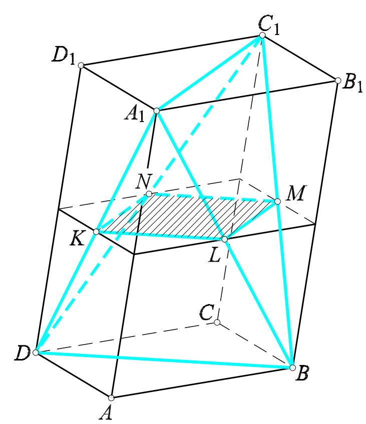
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2),$$

a to je i trebalo dokazati.

Naime, udaljenosti polovišta mimoilaznih bridova piramide jednake su duljinama bridova paralelepipeda u koji je piramida upisana.

Zadatak 4. Površina presjeka tetraedra ravninom $\mathcal{R}$ koja je paralelna dvama njegovim mimoilaznim bridovima i od njih jednako udaljena jednaka je P. Udaljenost tih bridova jednaka je d. Koliki je obujam tetraedra?

Neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepiped u koji je smješten tetraedar na način koji smo imali i u prethodnom zadatku. Obujam tetraedra jednak je $\frac{1}{3}$ obujma paralelepipeda. Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{A_1C_1}$ mimoilazni bridovi o kojima je riječ, a $KLMN$ je četverokut koji je presjek piramide i ravnine $\mathcal{R}$.



Površina paralelograma $ABCD$ je jedna-

** MŠ 14, strana 154.

ka $2P$, I sada je obujam tetraedra jednak

$$V = \frac{1}{3}V_p = \frac{2}{3}Pd.$$

Napomena: Na temelju ovog zadatka moguće je dokazati i sljedeću vrijednu tvrdnju koja je poznata kao *Simpsonova formula*.

Neka su svi vrhovi poliedra u dvjema paralelnim ravninama $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ koje su međusobno udaljene d. Površine strana poliedra koje leže u tim ravninama jednake su P_1 i P_2, a površina presjeka poliedra ravninom $\mathcal{R}$ koja je paralelna s $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ i prolazi na udaljenosti $\frac{1}{2}d$ od svake jednaka je P.

Tada je obujam tog poliedra jednak

$$V = \frac{d}{6} \cdot (P_1 + P_2 + 4P).$$

Pri provedbi dokaza valja prvo utvrditi da je formula točna za tetraedar. Zatim se poliedar razbije na tetraedre čiji su vrhovi u ravninama $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$.

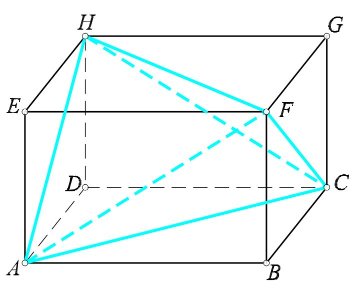
Zadatak 5. Koliki je obujam V trostrane piramide čije su sve strane međusobno sukladni šiljastokutni trokuti sa stranicama duljina a, b i c?

Prvo je pitanje egzistencije piramide kojoj su sve strane sukladni šiljastokutni trokuti. Ako postoji, takva je piramida na neki način poopćenje jednakostraničnog trokuta.

No lako je konstruirati takvu piramidu.

Uzmimo kvadar i povucimo u svakoj njegovoj strani po jednu dijagonalu kao na slici.

Lako je uočiti kako su sve strane trostrane piramide $ACFH$ međusobno sukladni trokuti.

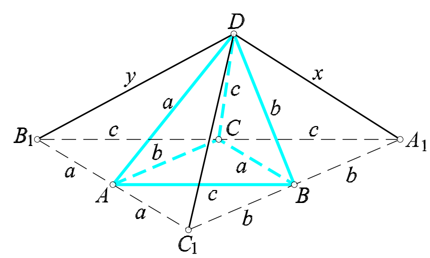


Zašto smo postavili uvjet da su sve strane *šiljastokutni* trokuti? Naime, trostrana piramida kojoj bi strane bile bilo pravokutni, bilo tupokutni trokuti ne postoji. Jer tada bi zbroj dvaju bridnih kutova uz jedan vrh bio manji (ili jednak) od trećeg bridnog kuta pri istom vrhu, te se uopće ne bi mogao zatvoriti prostorni trostrani kut.

Kako na prethodni crtež možemo gledati i na drugi način, kao na dopunu tetraedra do kvadra, onda volumen ove piramide možemo računati jednako kao volumen pravilnog tetraedra u prethodnom zadatku.

No ovdje je moguće provesti dopunu i jedne druge vrste. Pa pogledajmo kako.

Neka su sve strane piramide $ABCD$ sukladni šiljastokutni trokuti. Neka je strana $\triangle ABC$ osnovka piramide. Proširimo trokut $\triangle ABC$ tako da njegovim vrhovima položimo paralele sa suprotnim stranicama. Dobit ćemo tako trokut $\triangle A_1B_1C_1$.



Kad još spojimo točke A_1, B_1 i C_1 s vrhom D, dobit ćemo novu piramidu čije su bočne strane pravokutni trokuti. Zašto? Kad pogledamo primjerice stranu B_1C_1D, vidjet ćemo da je $|AB_1| = |AC_1| = |AD|$, što znači da je A središte kružnice opisane trokutu $\triangle B_1C_1D$. No onda je taj trokut pravokutan (*obrat Talesovog poučka*).

Položimo sada piramidu na jednu njezinu bočnu stranu pa će njezin volumen biti jednak $V_1 = \frac{1}{6}xyz$, gdje su x, y i z duljine bridova koji se sastaju u vrhu D.

Sada još iz sustava jednadžbi $x^2 + y^2 = 4c^2$, $y^2 + z^2 = 4a^2$, $x^2 + z^2 = 4b^2$ izračunamo x, y i z, pa nakon uvrštavanja u $V = \frac{1}{4}V_1$

dobijemo

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}.$$

Zadatak 6. Neka su P_1 i P_2 površine dviju strana trostrane piramide, a kut među njima neka je jednak α. Neka su Q_1 i Q_2 površine ostalih dviju strana i neka je β kut među tim stranama. Tada vrijedi

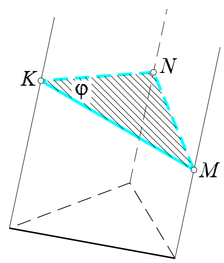
$$P_1^2+P_2^2-2P_1P_2\cos\alpha = Q_1^2+Q_2^2-2Q_1Q_2\cos\beta.$$

Dokaži!

Dokažimo najprije sljedeći *Poučak o kosinusu:*

Ako su površine dviju bočnih strana trostrane prizme jednake P_1 i P_2, te ako je kut između tih strana jednak φ, tada za površinu P_3 treće bočne strane prizme vrijedi

$$P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cdot\cos\varphi.$$

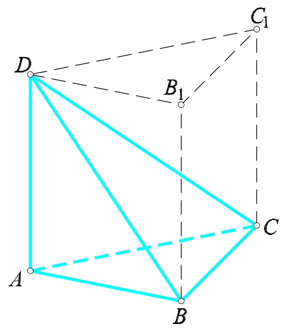


Položimo ravninu okomitu na bočne bridove prizme i neka ona prizmu siječe u trokutu $\triangle KMN$. Tada je $|MN|^2 = |KM|^2 + |KN|^2 - 2\cdot|KM|\cdot|KN|\cdot\cos\varphi$. Kad ovu jednakost pomnožimo sa b^2, gdje je b duljina bočnog brida prizme, dobit ćemo dokaz navedene tvrdnje.

Vratimo se zadatku.

Neka je dana trostrana piramida $ABCD$ i neka je P_1 površina trokuta $\triangle ABD$, a P_2 neka je površina trokuta $\triangle ACD$. Neka je kut između ta dva trokuta jednak α.

Dopunimo piramidu do trostrane prizme na način koji je prikazan na slici.



Neka je P površina paralelograma BCC_1B_1. Tada prema dokazanom poučku vrijedi:

$$P^2 = 4P_1^2 + 4P_2^2 - 8P_1P_2\cos\alpha.$$

Sad postupimo analogno i dopunimo piramidu do trostrane prizme kojoj je osnovka trokut $\triangle ACD$ a bočni brid dužina $\overline{BC}$. Tako dobijemo:

$$P^2 = 4Q_1^2 + 4Q_2^2 - 8Q_1Q_2\cos\beta.$$

No onda je $P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos\alpha = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\cos\beta$ i time je tvrdnja iskazana u zadatku 5. dokazana.

Rješenja iz broja 14:

26.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \times & 22 & = & 66 \\ + & & + & & : \\ 5 & - & 3 & = & 2 \\ \hline 8 & + & 25 & = & 33 \end{array}$$

27.

$$\begin{array}{ccccc} 11 & \times & 8 & = & 88 \\ \times & & \times & & + \\ 43 & + & 38 & = & 81 \\ \hline 473 & - & 304 & = & 169 \end{array}$$