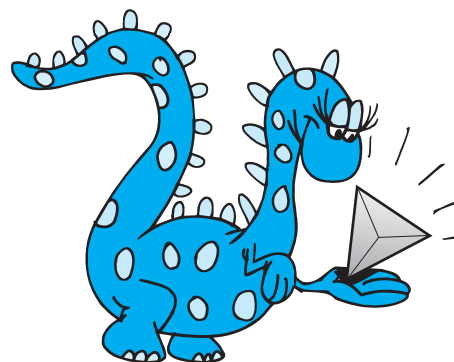


# Pitagorini tetraedri



Ela Rac-Marinić-Kragić, Zagreb

Problem Pitagorinih tetraedara poopćenje je poznatog problema Pitagorinih trokuta ili Pitagorinih trojki brojeva (tzv. pitagorejskih trojki brojeva — nešto malo o njima možete pročitati u drugom broju **MŠ**-a pod naslovom *Vječni Pitagora*, stranica 77, odnosno u trećem broju **MŠ**-a na stranici 109 pod naslovom *Pitagorine trojke*).

Trokut se naziva Pitagorinim ako je pravokutan i omjeri bilo kojih dviju stranica su racionalni brojevi (tada je iz njega moguće dobiti pravokutan trokut s cjelobrojnim duljinama stranica). Po analogiji s time nazivat ćemo tetraedar Pitagorinim ako su njegovi plošni kutovi kod jednog od vrhova pravi, a omjeri duljina bilo kojih dvaju bridova su racionalni brojevi (iz njega se pomoću sličnosti može dobiti tetraedar s pravokutnim trokutima uz jedan vrh i s cjelobrojnim duljinama svih bridova).

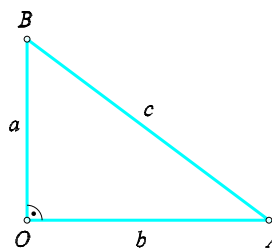
Zato ćemo izvesti **jednadžbe Pitagorinih tetraedara** tj. takve jednadžbe s trima nepoznanicama  $x, y, z$  da svaki Pitagorin tetraedar daje racionalno rješenje te jednadžbe i obratno, svako racionalno rješenje te jednadžbe predstavljat će Pitagorin tetraedar. Koristeći se tom jednakosti naći ćemo konkretne primjere Pitagorinih tetraedara.

## Pitagorini trokuti

Na početku pokazat ćemo kako pronaći sve Pitagorine trokute. Na slici 1. trokut  $OAB$  je pravokutan; duljine njegovih kateta su  $a$  i  $b$ , a duljina hipotenuze  $c$ . Broj

$$x = \frac{a}{b+c} \quad (1)$$

uvjetno ćemo nazivati parametrom pravokutnog trokuta  $OAB$  (ili, točnije, parametrom  $u$  odnosu na katetu  $a$ ).



Slika 1.

Koristeći relaciju  $c^2 = a^2 + b^2$  nalazimo

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= \frac{(b^2 + 2bc + c^2) + a^2}{(b+c)^2} \\ &= \frac{2c^2 + 2bc}{(b+c)^2} = \frac{2c}{b+c}, \end{aligned}$$



$$1 - x^2 = \frac{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2}{(b + c)^2}$$

$$= \frac{2b^2 + 2bc}{(b + c)^2} = \frac{2b}{b + c}.$$

Iz tih jednakosti neposredno dobivamo formule koje izražavaju omjere duljina stranica pravokutnog trokuta putem njegovog parametra  $x$ :

$$\frac{2x}{1 - x^2} = \frac{a}{b}, \quad \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = \frac{c}{b}. \quad (2)$$

1. Neka je  $\alpha$  mjera kuta  $OAB$ . Dokažite da je parametar  $x$  trokuta jednak  $\tan \frac{\alpha}{2}$ , i pomoću toga dajte drugi dokaz formula (2).

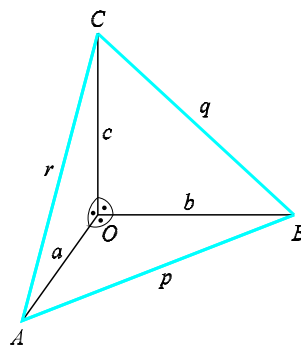
2. Dokažite da je parametar  $x'$  trokuta  $OAB$  u odnosu na katetu  $b$  (tj.  $x' = \frac{b}{a + c}$ ) povezan s parametrom  $x$  relacijom  $x' = \frac{1 - x}{1 + x}$ . Dajte interpretaciju te relacije pomoću trigonometrijskih funkcija (vidi zadatak 1).

Iz formula (1) i (2) neposredno slijedi ova tvrdnja: *Da bi pravokutni trokut bio Pitagorin, nužno je i dovoljno da broj  $x$  bude racionalan.* U stvari, ako je trokut Pitagorin, tada iz (1) slijedi da je  $x$  racionalan. Obratno, ako je  $x$  racionalan, tada su prema (2) omjeri duljina stranica trokuta racionalni, tj. trokut je Pitagorin.

## Jednadžba Pitagorinih tetraedara

Neka je sada  $OABC$  tetraedar kod kojeg su plošni kutovi pri vrhu  $O$  pravi. Duljine bridova koji izlaze iz vrha  $O$  označimo sa  $a, b, c$ , a duljine ostalih triju bridova sa  $p, q, r$  (slika 2). Razmotrimo parametre triju pravokutnih trokuta  $OAB, OBC, OCA$ :

$$x = \frac{a}{b + p}, \quad y = \frac{b}{c + q}, \quad z = \frac{c}{a + r}. \quad (3)$$



Slika 2.

Tada je prema formuli (2) moguće izraziti omjere duljina stranica tih pravokutnih trokuta preko njihovih parametara:

$$\frac{a}{b} = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{2y}{1 - y^2}, \quad \frac{c}{a} = \frac{2z}{1 - z^2}; \quad (4)$$

$$\frac{p}{b} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}, \quad \frac{q}{c} = \frac{1 + y^2}{1 - y^2}, \quad \frac{r}{a} = \frac{1 + z^2}{1 - z^2}. \quad (5)$$

Iz (4) neposredno slijedi da parametri  $x, y, z$  zadovoljavaju relaciju

$$\frac{2x}{1 - x^2} \cdot \frac{2y}{1 - y^2} \cdot \frac{2z}{1 - z^2} = 1. \quad (6)$$

To je najavljena **jednadžba Pitagorinih tetraedara**.

3. Dokažite: ako tri pozitivna broja  $x, y, z$  od kojih je svaki manji od jedinice zadovoljavaju jednadžbu (6), tada postoji tetraedar s pravim plošnim kutovima kod jednog vrha, za koji (pri oznakama kao na slici 2) vrijede jednakosti (3) (pa prema tome i jednakosti (4), (5)).

4. Dokažite: ako su  $x, y, z$  rješenja neodređene jednadžbe (6), tada su i brojevi

$$x' = \frac{1 - x}{1 + x}, \quad y' = \frac{1 - y}{1 + y}, \quad z' = \frac{1 - z}{1 + z}$$

također rješenja iste jednadžbe (zvat ćemo ih ubuduće *pridruženim rješenjima*).

Dokažite: ako je svaki od brojeva  $x, y, z$  pozitivan i manji od 1, tada i svaki od brojeva  $x', y', z'$  ima ista svojstva. Kakvo je geometrijsko značenje ovisnosti para pridruženih rješenja jednadžbe (6)?



5. Dokažite: ako su  $x, y, z$  rješenja jednadžbe (6), pri čemu je svako od njih pozitivno i manje od 1, tada se tetraedar  $OABC$  o kojem se govori u zadatku 3 može dobiti na sljedeći način: iz točke  $O$  povucimo tri međusobno okomite dužine  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  čije su duljine redom

$$|OA| = 1, \quad |OB| = \frac{1 - x^2}{2x},$$

$$|OC| = \frac{1 - x^2}{2x} \cdot \frac{1 - y^2}{2y}.$$

6. Neka su brojevi  $x, y, z$  rješenja jednadžbe (6). Je li moguće da dva od tih brojeva budu racionalni, a da treći broj bude iracionalan? Dajte geometrijsku interpretaciju odgovora.

7. Neka brojevi  $x, y, z$  predstavljaju racionalna rješenja jednadžbe (6), pri čemu je svaki od njih pozitivan i manji od 1. Dokažite: ako vrijedi  $x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{q}$  (gdje su  $m, n, p, q$  prirodni brojevi), tada je tetraedar s pravim plošnim kutovima pri jednom vrhu i bridovima (koji izlaze iz tog vrha) sljedećih duljina

$$a = 4mnpq, \quad b = 2pq \cdot (n^2 - m^2),$$

$$c = (n^2 - m^2)(q^2 - p^2)$$

*Pitagorin tetraedar.*

Iz formula (3) – (5) neposredno izlazi sljedeća tvrdnja: *Da bi tetraedar  $OABC$  s pravim plošnim kutovima kod vrha  $O$  bio*

*Pitagorin, nužno je i dovoljno da parametri  $x, y$  i  $z$  (koji zadovoljavaju (6)) budu racionalni. U stvari, ako je tetraedar Pitagorin (tj. omjer bilo kojih dvaju njegovih bridova je racionalan), tada iz (3) slijedi da su  $x, y, z$  racionalni. Obratno, ako su  $x, y, z$  racionalni, tada je u skladu sa (4), (5) omjer bilo kojih dvaju bridova racionalan, tj. tetraedar je Pitagorin.*

## Traženje Pitagorinih tetraedara

Vidimo da je zadatak nalaženja Pitagorinih tetraedara algebarski ekvivalentan zadatku nalaženja racionalnih rješenja neodređene jednadžbe (6) uz uvjete  $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$ . Lako se uvjerimo direktnom provjerom da su trojke iz tablice 1. rješenja.

|     | $x$   | $y$   | $z$   |
|-----|-------|-------|-------|
| 1.  | 5/6   | 2/11  | 3/13  |
| 2.  | 5/8   | 1/11  | 9/13  |
| 3.  | 1/7   | 9/11  | 5/16  |
| 4.  | 5/6   | 6/11  | 1/17  |
| 5.  | 8/9   | 1/11  | 5/17  |
| 6.  | 2/5   | 5/11  | 7/18  |
| 7.  | 3/4   | 1/10  | 11/21 |
| 8.  | 2/13  | 17/22 | 9/25  |
| 9.  | 3/7   | 3/8   | 11/25 |
| 10. | 21/23 | 1/24  | 11/25 |
| 11. | 7/18  | 1/22  | 23/25 |

Tablica 1.

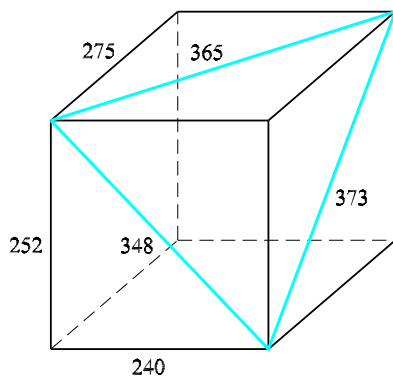
|     | $a$  | $b$   | $c$   | $p$   | $q$   | $r$   |
|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.  | 240  | 44    | 117   | 244   | 125   | 267   |
| 2.  | 880  | 429   | 2340  | 979   | 2379  | 2500  |
| 3.  | 231  | 792   | 160   | 825   | 808   | 281   |
| 4.  | 720  | 132   | 85    | 732   | 157   | 725   |
| 5.  | 1584 | 187   | 1020  | 1595  | 1037  | 1884  |
| 6.  | 1100 | 1155  | 1008  | 1595  | 1533  | 1492  |
| 7.  | 480  | 140   | 693   | 500   | 707   | 843   |
| 8.  | 3536 | 11220 | 2925  | 11764 | 11595 | 4589  |
| 9.  | 252  | 240   | 275   | 348   | 365   | 373   |
| 10. | 5796 | 528   | 6325  | 5820  | 6347  | 8579  |
| 11. | 1108 | 1100  | 12075 | 1492  | 12125 | 12117 |

Tablica 2.



Ovo daje mogućnost izračunavanja jedanaest Pitagorinih tetraedara. Za izračunavanje duljina bridova možemo se koristiti zadatkom 7 (po potrebi napraviti ćemo skraćivanje zajedničkog množitelja). Bridovi tih tetraedara izračunati su u tablici 2.

Primijetimo još da ćemo, ako Pitagorin tetraedar  $OABC$  dopunimo do paralelepipeda s bridovima  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ , dobiti Pitagorin paralelepiped tj. pravokutni paralelepiped s racionalnim (ili cjelobrojnim) duljinama svih bridova. Na slici 3 prikazan je paralelepiped dobiven na taj način pomoću devetog Pitagorinog tetraedra iz tablice 2. Prostorna dijagonala tog paralelepipeda ima iracionalnu duljinu. Postoji li pravokutni paralelepiped (kvadar) kod kojega su svi bridovi, sve plosne dijagonale i prostorna dijagonala cjelobrojnih duljina, nije poznato.



Slika 3.

**8.** Pokažite da se deset od prikazanih jedanaest rješenja jednadžbe (6) javljaju u parovima pridruženih rješenja (to su parovi 1-2, 3-7, 4-5, 6-9, 10-11), dok rješenje pod rednim brojem 8. iz tablice 1 nema pridruženog rješenja. Nađite mu pridruženo rješenje i odgovarajući Pitagorin tetraedar.

**9.** Nazvat ćemo pravokutni paralelepiped *Pitagorinim paralelepipedom drugog reda* ako svi njegovi bridovi i prostorna dijagonala imaju racionalne duljine. Dokažite: ako su  $a_1, a_2, a_3$  duljine bridova pravokutnog paralelepipeda, a  $d$  duljina njegove prostorne

dijagonale, tada je on *Pitagorin paralelepiped drugog reda* ako i samo ako su oba parametra

$$x_1 = \frac{a_1}{a_3 + d}, \quad x_2 = \frac{a_2}{a_3 + d}$$

racionalni brojevi. Dokažite da za taj paralelepiped vrijede relacije

$$\frac{a_1}{d} = \frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{a_2}{d} = \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{a_3}{d} = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

**10.** Poopćivši rezultat zadatka 9 dokažite da je svako racionalno rješenje neodređene jednadžbe

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = d^2$$

oblika

$$a_1 = k \cdot 2x_1,$$

$$a_2 = k \cdot 2x_2, \dots, a_{n-1} = k \cdot 2x_{n-1},$$

$$a_n = k(1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2),$$

$$d = k(1 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2),$$

gdje su  $x_1, \dots, x_{n-1}$  proizvoljni racionalni brojevi (parametri) a koeficijent  $k$  je također racionalan. Možete li dati geometrijsku interpretaciju toga rezultata?

**11.** Poopćite rezultat zadatka 10 na neodređenu jednadžbu

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_q^2$$

(tj. nađite formulu za nalaženje svih racionalnih rješenja).

\* \* \*

U zaključku ostavljamo pitanje o tome kako pronaći daljnja rješenja jednadžbe (6). Za to je korišteno elektronsko računalo. Algoritam je sastavljen na osnovi sljedećih relacija: Neka su

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{c}{d}, \quad z = \frac{e}{f}, \quad (7)$$

gdje su  $a, b, c, d, e, f$  prirodni brojevi. Ideja algoritma je proći sve takve šestorke dajući svakom od 6 brojeva vrijednosti 1, 2, ..., 25 po formuli (7) i naći odgovarajuće trojke



$(x, y, z)$  i među njima odabrati one koje zadovoljavaju jednadžbu (6). U stvarnosti trebalo je izvesti proračun ne s parametrima  $x, y, z$  nego s prirodnim brojevima  $a, b, c, d, e, f$ . Stvar je u tome da je pri radu s racionalnim brojevima  $x, y, z$  računalo iste zamijenilo približnim rješenjima (zbog zaokruživanja decimala) a koja ne zadovoljavaju *sasvim točno* jednadžbu (6).

## Kratka rješenja zadataka

$$1. \ x = \frac{a}{b+c} = \frac{1}{\frac{b+c}{a}} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . Univerzalnom supstitucijom se dobiva:

$$\frac{a}{b} = \frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{c}{b} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{\cos \beta}.$$

$$2. \ x' = \frac{1-x}{1+x}, \quad \frac{b}{a+c} = \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}},$$

$b^2 + bc + ab = ab + ac - a^2 + bc + c^2 - ac$   
 $b^2 + bc + ab = ab + bc + b^2$   
 te kako posljednja jednakost vrijedi, vrijedit će i početna koja joj je ekvivalentna. Trigonometrijska interpretacija daje

$$x' = \frac{b}{a+c} = \frac{1}{\frac{a+c}{b}} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta + \frac{1}{\sin \beta}} = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

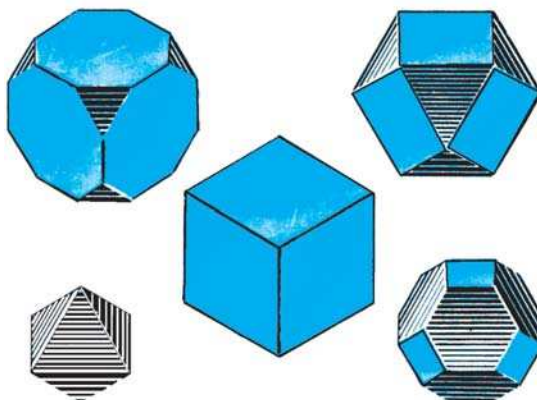
4. Dokaz direktno slijedi uvrštavanjem  $x', y', z'$  u lijevu stranu jednadžbe (6) i zamjenama  $x' = \frac{1-x}{1+x}, \quad y' = \frac{1-y}{1+y}, \quad z' = \frac{1-z}{1+z}$ . Dobiva se  $\frac{1-x^2}{2x} \cdot \frac{1-z^2}{2y} \cdot \frac{1-z^2}{2z}$  što također iznosi 1.

Pokušamo li naći geometrijsku interpretaciju pridruženih rješenja jednadžbe (6) i bridova odgovarajućih Pitagorinih tetraedara, vidimo da su omjeri bridova (možda ne u jednakom poretku)  $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ , i bridova pridruženog Pitagorinog tetraedra jednaki što znači da su pridruženi Pitagorini tetraedri konstruirani iz pravokutnih trokuta sličnih pravokutnim trokutima prvog Pitagorinog tetraedra.

5. Dokaže se direktno iz jednakosti (2) ako se u prvu uvrsti  $a = 1$  i zatim dobiveni  $b$  u drugu jednakost.

7. Dobivamo kao direktnu posljedicu rješenja zadatka 5 uvrštavajući  $x = \frac{m}{n}, z = \frac{p}{q}$  i proširivanjem sva tri broja s njihovim najmanjim zajedničkim nazivnikom.

8. Pridruženo je rješenje  $(x', y', z') = \left(\frac{11}{15}, \frac{5}{39}, \frac{8}{17}\right)$ , a odgovarajući su bridovi Pitagorinog tetraedra redom 2475, 780, 2992, 2595, 3092, 3883.



*Sve strane pet poliedara na slici pravilni su mnogokuti. Ti su poliedri dobiveni od kocke a nastali su istom operacijom odsijecanja ravninom dijelova kocke pri njezinim vhovima. Opišite je!*

