Metodička radionica

Zdravko Kurnik, Zagreb

U današnje vrijeme teško je naći područje ljudske djelatnosti za koje ne trebaju određena matematička znanja. Svakodnevni rad iziskuje sve više umnog napora, analize složenih procesa, pravilnih rasuđivanja, logičkih zaključivanja i rješavanja različitih problema. Raste potreba za stručnjacima s dobrim matematičkim znanjem i umijećem da ta znanja znaju primijeniti. Zato društvo postavlja pred školu sve veće zahtjeve u pogledu obrazovanja mladih ljudi. Da bi škola mogla na zadovoljavajući način odgovoriti na postavljene zahtjeve, mijenjaju se i obogaćuju nastavni programi, usavršavaju nastavne metode, uvode nova nastavna sredstva i tehnologije. Živimo u vremenu u kojem jednom stečena znanja nisu dovoljna. Razvojem društva neka od tih znanja brzo postaju neuporabljiva i beskorisna, javlja se potreba za novim znanjima. To znači da se i nastavnik matematike mora neprekidno usavršavati.

Sada se lako naslućuje da suvremena nastava matematike postavlja i zahtijeva rješavanje dva bitna problema. To su:

problem razvoja stvaralačkog mišljenja i kreativnih sposobnosti učenika

problem primjerenog osposobljavanja nastavnika matematike.

Suvremena metodika nastave matematike pruža razne mogućnosti za rješavanje ovih dvaju problema.

Osvrnimo se malo podrobnije na drugi problem. I dosad su postojali različiti oblici cjeloživotnog usavršavanja nastavnika matematike. Jedan od njih su **seminari** za učitelje i profesore matematike koji se provode dugi niz godina i koji su tako postali tradicionalni oblik rada. Međutim, oni imaju jednu izrazitu slabost: o izboru tema odlučuju najčešće samo predavači, teme su najčešće nepovezane, nema dogovora ni usklađenosti, a prilikom obrade tema slušatelji su dosta pasivni. Posljednjih godina ozbiljnije se razmišlja o poboljšanju ovog oblika rada. Rezultat tog promišljanja je uvođenje matematičkih i metodičkih radionica.

Metodička radionica

Što je metodička radionica? Metodika nastave matematike vrlo jasno ističe da je za učenike najbolji oblik nastave kombinacija grupnog i individualnog rada. Taj je oblik rada u našoj školskoj praksi prilično zapostavljen. Da bi nastavnik matematike bolje spoznao vrijednosti i prednosti toga oblika rada, najbolje je da i sam dođe u takvu problemsku situaciju, da tako radi. To je ključna zamisao metodičke radionice.

Metodička radionica je prema tome oblik aktivnijeg sudjelovanja nastavnika matematike u vlastitom usavršavanju s većim naglaskom na metodičkim postavkama i zakonitostima putem rada u manjim grupama nastavnika matematike u kojem se ostvaruju sljedeći ciljevi:

- iznošenje vlastitog iskustva
- slušanje drugih nastavnika i upoznavanje njihovih iskustava
- razgovor o idejama i metodičkim pitanjima
- razmjena ideja
- zajedničko osmišljavanje problema i pitanja
- osmišljavanje metodičkog pristupa rješavanja problema
- djelotvorna rasprava o rezultatima samostalnog i zajedničkog rada
- provjeravanje osobnog mišljenja
- razvijanje sposobnosti prosuđivanja i zaključivanja
- razvijanje sposobnosti matematičkog komuniciranja i dr.

Rad u metodičkoj radionici proizlazi iz prvog gore navedenog problema koji se može raščlaniti u pet ciljeva suvremene nastave matematike:

učenje vrednovanja matematike
razvijanje i njegovanje matematičkih sposobnosti
razvijanje sposobnosti rješavanja problema
učenje matematičkog rasuđivanja
učenje matematičke komunikacije.

Uspoređivanjem ciljeva vidi se da su ciljevi rada nastavnika matematike u metodičkoj radionici potpuno prilagođeni ostvarenju navedenih ciljeva suvremene nastave matematike.

Nije teško navesti područja i teme pogodne za primjenu metodičkih radionica. To su gotovo bez iznimke sva područja nastavnikove djelatnosti, ali neka područja su izrazito pogodna za njih. Primjena metodičkih radionica u tim područjima može kasnije znatno unaprijediti rad s učenicima u nastavnom procesu, posebno rad s naprednijim učenicima. Jer, radom u metodičkoj radionici nastavnik dobiva primjerenu **teorijsku osnovu** i **metodičku razradu** neke teme s nizom prikladno odabranih primjera i zadataka, a zajednički stavovi nastavnika u pojedinim grupama daju svakom nastavniku matematike veću sigurnost pri izvođenju vlastite nastave.

Evo nekih područja nastavnikove djelatnosti:

redovna nastava, dopunska nastava, dodatna nastava, matematičke grupe, matematička literatura, povijest matematike, zanimljiva matematika, popularizacija matematike, matematička natjecanja.

Opisat ćemo u kratkim crtama zamisli u vezi s metodičkim radionicama u tri područja.

Redovna nastava. Redovna nastava je težište cjelokupne nastavnikove djelatnosti i za njezino izvođenje nastavnik ulaže najviše vremena, truda i energije. Na seminarima nastavnici često u vezi s redovnom nastavom iznose različite probleme i dileme, te traže odgovore na mnoga pitanja. Zato za primjenu metodičkih radionica ovdje postoje velike mogućnosti. Predmet rada u njima može biti: *planiranje, razrada nastavnih planova i programa, inicijalni testovi, osmišljavanje pojedinih nastavnih jedinica, motivacija, izbor oblika rada i nastavnih metoda, izbor prikladnih primjera i zadataka, školske zadaće, ocjenjivanje učenika, primjena računala u nastavi matematike* i dr.

Metodičke radionice s gornjom tematikom najlakše i najčešće mogu se održavati u stručnim aktivima škola. Stručni aktivi su već sami po sebi male grupe i dobri rezultati rada u njima mogu se brzo postići. No, važnost tih metodičkih radionica je općeg karaktera, pa je poželjna njihova povremena organizacija i šire, na nivou gradova, županija i cijele zemlje.

Dopunska nastava. Dio učenika propustio je pravi trenutak stjecanja nekih znanja i sada ih čeka dvostruki rad: nadoknađivanje propuštenog i svladavanje novog gradiva. Mogu li oni to i kako? To je pitanje koje si postavlja svaki nastavnik matematike. Popunjavanje praznina u znanju učenika zbog toga postaje vrlo zahtjevan posao. Metodička radionica u kojoj bi nastavnici razmijenili iskustva i osmislili zajednički pristup problemu dopunske nastave sigurno bi pomogla pri traženju odgovora na gornje pitanje. Time bi svaki nastavnik bio oslobođen muke da sam pronalazi najbolje rješenje.

Matematička natjecanja. Natjecanja su važna iz više razloga. Ona pobuđuju i šire interes za učenje matematike, razvijaju naviku intenzivnog i ustrajnog rada, obogaćuju matematičko znanje, a važna su i zato što se na njima učenicima pruža prilika i ispunjava prirodna želja da provjere svoje matematičke sposobnosti. Međutim, dugogodišnje praćenje matematičkih natjecanja pokazuje da se i naši najbolji učenici često dobro ne snalaze u rješavanju nestandardnih i složenijih zadataka i postižu slabe rezultate. Manjkaju im neka znanja, ne poznaju neke jednostavne metode rješavanja matematičkih problema.

Budući da je za uspješno rješavanje problema iz nekog područja matematike potrebna prije svega primjerena teorijska osnova i njezina dobra metodička razrada, to rješenje uočenog problema treba potražiti u organizaciji posebnih metodičkih radionica. U njima bi se nastavnici matematike upoznali s načinom primjerenog pripremanja učenika za natjecanja.

Za ilustraciju opisat ćemo ukratko teorijske osnove za dvije teme, važne za matematička natjecanja. Prva je predviđena za rad s učenicima srednjih škola, a druga s učenicima osnovnih škola.

Metodička radionica ALGEBARSKE NEJEDNAKOSTI

Zadaci s nejednakostima često se pojavljuju na matematičkim natjecanjima. Tako se na našim matematičkim natjecanjima svake godine učenicima daju na rješavanje od 2 do 4 zadatka s nejednakostima. Zadaci s nejednakostima su jedan primjer zadataka pri rješavanju kojih srednjoškolci imaju dosta poteškoća. Razlog možemo pronaći najprije u manjkavosti pripreme učenika za tako zahtjevnu aktivnost kao što su natjecanja.

Jedan od razloga neuspješnosti dokazivanja nejednakosti nalazimo i u zbirkama zadataka iz elementarne matematike. One obično imaju posebna poglavlja s nejednakostima, ali i značajan nedostatak. Dokazi nejednakosti koji se daju u zbirkama pretežno su kratki, sažeti, a nisu rijetki ni dokazi koji se zasnivaju na oštroumnosti i domišljatosti. Iako se i iz takvih dokaza može mnogo naučiti, opravdana je zamjerka što im je glavni cilj neposredna potvrda postavljene konkretne tvrdnje, dok je zapostavljena **metodička** strana dokaza, odnosno objašnjenje i razrada **postupka** koji bi se mogao primijeniti i u drugim sličnim slučajevima.

S druge strane, područje nejednakosti vrlo je pogodno za uspješnu primjenu **analize**, jer se ovdje, za razliku od nekih drugih područja matematike, istraživanje može odmah usmjeriti na pravi put koji u većini slučajeva brzo daje pozitivne rezultate. Tako u prvi plan dolazi učenje i usvajanje metoda. Ne treba posebno naglašavati koliko je ta činjenica važna u radu s naprednijim učenicima, budući da oni brže shvaćaju i već nakon par riješenih primjera usvajaju metodu rješavanja. Time se ujedno smanjuje potreba rješavanja velikog broja zadataka, s čime se nerijetko pretjeruje. S druge strane, metode pružaju učenicima veću sigurnost i nadu da će neki problem riješiti na zadovoljavajući način, a usvojeno znanje je trajnije.

Metodička radionica NEJEDNAKOSTI ima za cilj upravo to: pružiti nastavnicima teorijsku osnovu i metodičku razradu postupka potrebnog za uspješno rješavanje zadataka iz ovog područja. Prenošenjem tog znanja učenicima osigurava se njihova primjerenija priprema za natjecanja. Postupak se sastoji od tri koraka.

1) Provjera znanja o osnovnim svojstvima nejednakosti.

U školi se uči niz osnovnih svojstava nejednakosti koja su dovoljna pri dokazivanju nekih jednostavnijih nejednaksti. Njihovo poznavanje se pretpostavlja, što nastavnik treba neposredno provjeriti. Evo najvažnijih od tih svojstava:

1) Ako je $a > b$ i $b > c$, onda je $a > c$.
2) Ako je $a > b$, onda je $a + c > b + c$.
3) Ako je $a > b$ i $c > d$, onda je $a + c > b + d$.
4) Ako je $a > b$ i $c < d$, onda je $a - c > b - d$.
5) Ako je $a > b$ i $c > 0$, onda je $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
6) Ako je $a > b$ i $c < 0$, onda je $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
7) Ako su a, b, c, d pozitivni realni brojevi i $a > b$ i $c > d$, onda je $ac > bd$.
8) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
9) $|a - b| \geq |a| - |b|$.
10) Ako je $a > b > 0$ i $x > 0$, onda je $a^x > b^x$.
11) Ako je $a > 1$ i $x > y > 0$, onda je $a^x > a^y$, a ako je $0 < a < 1$ i $x > y > 0$, onda je $a^x < a^y$.

Ovdje se već pruža nastavniku prilika da ukazuje učenicima na mogućnost **poopćavanja** svojstava 1), 3), 7) i 8). Poželjno je da učenici i riječima znaju iskazati sve te nejednakosti.

2) Provjera znanja o jednostavnijim i posebnim nejednakostima.

Za dokazivanje složenijih i težih nejednakosti često se primjenjuje niz jednostavnijih i posebnih nejednaksti. Sigurno je da napredniji učenici znaju neke od njih. Prije daljnjeg rada nastavnik treba provjeriti širinu tog poznavanja. Evo nekih od tih nejednakosti:

1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\ (a, b > 0)$.
3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2\ (ab < 0)$.
4) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}\ (a, b, c > 0,\ a < b)$.
5) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ $(a, b > 0)$.
6) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$.

Ovaj niz nejednakosti lako se može nadopuniti **analogonima** i **poopćenjima**. Poželjno je da to učine sami učenici. Na taj način se njeguje i razvija njihova kreativnost. Također je poželjno da se niz nejednakosti koje učenici poznaju neprestano proširuje novim nejednakostima. Ako još napomenemo da dokazi nekih od tih nejednakosti nisu jednostavni, onda postaje vidljivo da već ovdje ima dovoljno prostora i mogućnosti za ozbiljan rad s učenicima. Svakako da će dobro pripremljen nastavnik to znati iskoristiti.

3) Upoznavanje učenika sa standardnim metodama dokazivanja.

Postoje različiti načini dokazivanja nejednakosti. U zbirkama zadataka najčešće se susreću sljedeća tri:

1) Način dokazivanja je očigledan, lako uočljiv, prirodan i sam se nameće.
2) Primjena posebnih nejednakosti.
3) Primjena metode matematičke indukcije.

Dobro je odmah pomisliti na ove načine. Ali, što onda ako nijedan od ovih načina dokazivanja nije primjenjiv ili se primjena ne otkriva brzo? Čest je slučaj da učenici zbog nesigurnosti i kod relativno jednostavnih nejednakosti gube dosta vremena u promišljanju i na kraju ih ne uspijevaju dokazati. Odustaju. Sigurniji pristup dokazivanju nejednaksti nalazi se u dosljednjoj primjeni analize.

4) Primjena analitičko-sintetičke metode.

U području nejednakosti analitičko-sintetička metoda je metodički dobro razrađena i može se primjereno primijeniti od početka.

Kao polazni korak služi zadana nejednakost N_0. Ta nejednakost nastoji se transformacijama prevesti u što jednostavnije nejednakosti $N_1, N_2, \dots, N_{k-1}, N_k$, a cilj je da krajnja nejednakost N_k bude očigledna. Transformacije koje se najčešće koriste su: *množenje nejednakosti zajedničkim nazivnikom članova, prenošenje članova na istu stranu, množenje zagrada, drukčije grupiranje članova, izlučivanje zajedničkih faktora, supstitucija.* Ako se nejednakost svela na oblik > 0, očiglednost krajnje nejednakosti N_k postiže se na taj način da se lijeva strana nejednakosti prikaže kao zbroj pozitivnih članova, što se opet najčešće postiže kvadratima. Tako se dobiva niz istinitih implikacija. Analizom se otkriva početni korak dokaza. Dokaz se provodi sintezom. Ukratko:

(Analiza)

$$N_0 \Longrightarrow N_1 \Longrightarrow \dots \Longrightarrow N_{k-1} \Longrightarrow N_k.$$

(Sinteza)

$$N_k \Longrightarrow N_{k-1} \Longrightarrow \dots \Longrightarrow N_1 \Longrightarrow N_0.$$

Ako nastavnik upozna učenike s opisanim postupkom dokazivanja nejednakosti na nizu prikladno odabranih primjera, učenici će kod svake nove nejednakosti moći bez velike pripreme i nervoze početi s njezinim dokazivanjem.

Slabo poznavanje gornjeg postupka ilustrirat ćemo primjerom s natjecanja.

Primjer. Na Državnom natjecanju 1994. godine učenici prvog razreda trebali su riješiti i sljedeći zadatak:

Dokažite da za svaka dva pozitivna broja p i q vrijedi nejednakost

$$(p^2 + p + l)(q^2 + q + 1) \geq 9pq.$$

Iako ovaj dokazni zadatak zaista nije težak, na natjecanju ga je u potpunosti dokazalo samo 10 učenika od njih 26. Čak 13 učenika nije osvojilo ni bod, među njima i jedan nagrađeni učenik!

Pogledajmo koje su mogućnosti stajale pred učenicima.

Ako se poznaje osnovni postupak pri dokazivanju algebarskih nejednakosti, onda se gornja tvrdnja može brzo opravdati. U tom postupku mišljenje se najprije usmjerava na otkrivanje lako uočljivog načina dokazivanja, zatim se pomišlja na primjenu nekih jednostavnih i posebnih nejednakosti, a u krajnjem slučaju primjenjuje se analitičko- sintetička metoda svođenja na očiglednu nejednakost. Pogledajmo ostvarenja raznih zamisli:

a) Prikladna transformacija lijeve strane nejednakosti daje $(p^2+p+1)(q^2+q+1) = [(p-1)^2+3p][(q-1)^2+3q]$ a to je očito $\geq 9pq$.

b) Pažljivim gledanjem polazne nejednakosti brzo se uočava da se ona može shvatiti kao rezultat množenja nejednakosti $p^2+p+1 \geq 3p$, $q^2+q+1 \geq 3q$. A vrijede li te nejednakosti? Vrijede, jer su one posljedice očitih nejednakosti $(p-1)^2 \geq 0$, $(q-1)^2 \geq 0$.

c) Nakon dijeljenja sa pq nejednakost možemo zapisati u obliku

$$(p + \frac{1}{p} + 1)(q + \frac{1}{q} + 1) \geq 9.$$

Valjanost ove nejednakosti proizlazi iz činjenice da za svaki pozitivni broj x vrijedi nejednakost $x + \frac{1}{x} \geq 2$. U ovom dokazu primjenjuje se, dakle, jednostavna nejednakost 2) iz **2)**.

d) Analitičko-sintetička metoda. Pretpostavimo da učenici nisu "vidjeli" ni jedan od gornja tri brza i jednostavna dokaza. Tada im je ostala još mogućnost primjene ove metode. Nejednakost svedemo u prvom koraku na oblik $(p^2+p+1)(q^2+q+1)-9pq \geq 0$, a zatim lijevu stranu transformiramo sve dok konačno ne dobijemo očiglednu nejednakost. Imamo redom

$$\begin{aligned}
&(p^2+p+1)(q^2+q+1)-9pq = \\
&= p^2q^2+p^2q+p^2+pq^2+p+q^2+q+1-8pq \\
&= (p^2q^2-2pq+1)+(p^2q-2pq+q) \\
&\quad + (pq^2-2pq+p)+(p^2+q^2-2pq)
\end{aligned}$$

$= (pq-1)^2+q(p-1)^2+p(q-1)^2+(p-q)^2$
$\geq 0.$

Nije teško zaključiti da bi znanje iz ove metodičke radionice znatno poboljšalo rješivost gornjeg zadatka. I ne samo njega.

Metodička radionica DIOFANTSKE JEDNADŽBE

U programu natjecanja iz matematike stoji sljedeći dodatak: Učenici osnovnih škola koji sudjeluju na županijskim, regionalnim i državnom natjecanju mogu očekivati zadatke i iz ovih područja: logički zadaci, kombinatorni zadaci, diofantske jednadžbe i Dirićletov princip.

Na taj način **diofantske jednadžbe** su odabrane kao dodatni matematički sadržaj koji napredniji učenici trebaju poznavati da bi bili što bolje pripremljeni za navedene razine natjecanja. Koje se jednadžbe nazivaju diofantske jednadžbe?

Algebarske jednadžbe ili sustav takvih jednadžbi s dvije ili više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima za koje se traže cjelobrojna ili racionalna rješenja nazivaju se *diofantske jednadžbe*. Pri tome broj nepoznanica veći je od broja jednadžbi. Diofantske jednadžbe mogu biti linearne i nelinearne.

Primjeri: $4x-5y=0$, $3x+7y=8$, $6x+2y-11z=14$ (linearne diofantske jednadžbe), $x^2-2y^2=1$, $x^2+y^2=z^2$, $xy-5x+y=12$ (kvadratne diofantske jednadžbe).

Mnogi matematički problemi svode se na rješavanje diofantskih jednadžbi. Postoje razne metode njihova rješavanja. Neke od njih su jednostavne i primjerene znanju matematike učenika osnovnih škola. Za njihovu primjenu dovoljno je samo malo pokretljivije mišljenje, određeni način rasuđivanja koji ne izlazi iz okvira školske matematike. Međutim, i ovdje je potrebno istaknuti da često i naši najbolji učenici osnovnih škola imaju poteškoća s rješavanjem takvih nešto složenijih zadataka. Razlog je lako otkriti: ne znajući određene načine rješavanja, učenici za takve postavljene zadatke misle da su teški i odustaju, a njihovo znanje ostaje pasivno i neiskorišteno.

Očito, treba poboljšati i način pripremanja učenika osnovnih škola za matematička natjecanja. Kad se to kaže, onda se ne misli samo da učenici trebaju u okviru tih priprema riješiti što više različitih zadataka. I to je svakako dobro, ali ono što je daleko važnije jest da učenici tijekom priprema obogate svoje znanje novim činjenicama, a posebno odgovarajućim metodama rješavanja.

Metodička radionica DIOFANTSKE JEDNADŽBE ima za cilj upravo to: pružiti učiteljima matematike teorijsku osnovu i metodičku razradu postupka potrebnog za uspješno rješavanje zadataka iz ovog područja. Prenošenjem tog znanja učenicima osigurava se njihova primjerenija priprema za natjecanja. Postupak se sastoji od dva koraka

1) Provjera znanja učenika o osnovnim činjenicama o brojevima.

Za uspješno rješavanje diofantskih jednadžbi potrebno je i korisno da učenici znaju niz činjenica o brojevima. Evo nekih od njih:

1° Parni prirodni broj je oblika $2k$, a neparni oblika $2k-1$.

2° Prirodni broj je djeljiv sa 3 (9) ako mu je zbroj znamenaka djeljiv sa 3 (9).

3° Ako je svaki pribrojnik djeljiv nekim brojem, onda je i zbroj djeljiv tim brojem.

4° Umnožak tri uzastopna prirodna broja djeljiv je sa 6.

5° Umnožak dva uzastopna parna broja djeljiv je sa 8.

6° Kvadrati prirodnih brojeva ne mogu završavati sa 2,3,7 i 8.

7° Svaki prost broj veći od 3 oblika je $6k-1$ ili $6k+1$.

8° Ako je n^2 paran (neparan) broj, onda je i n paran (neparan) broj.

9° Zbroj i razlika dvaju cijelih brojeva iste je parnosti.

Poželjno je da se ovaj niz u toku rada proširuje novim činjenicama i tako povećava znanje učenika o brojevima.

2) Upoznavanje učenika s metodama rješavanja.

Koje metode rješavanja diofantskih jednadžbi je poželjno da učenici znaju? To su: *metoda umnoška, metoda kvocijenta, metoda parnosti, metoda posljednje znamenke i metoda nejednakosti*. Sve su te metode zapravo posebni oblici jedne opće metode, koja se naziva *metoda razlikovanja slučajeva*. Metoda igra važnu ulogu u matematici i nastavi matematike zbog svoje glavne značajke da se njezinom primjenom rješavanje nekog težeg problema svodi na rješavanje nekoliko jednostavnijih problema.

1. Metoda umnoška. Metoda se sastoji u sljedećem: zadana diofantska jednadžba svede se najprije nizom transformacija na oblik u kojem je lijeva strana, gdje se nalaze nepoznanice, umnožak, a desna strana broj. Zatim se razmatraju svi mogući slučajevi za dobivene faktore.

Primjer. Ako trebamo riješiti kvadratnu diofantsku jednadžbu $xy+7x-2y-25=0$ u skupu cijelih brojeva, onda je najprije transformiramo na oblik $(x-2)(y+7)=11$, a zatim uspoređujemo faktore na lijevoj i desnoj strani. Jednadžba se svodi na rješavanje četiri sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

2. Metoda kvocijenta. Metoda se sastoji u sljedećem: zadana diofantska jednadžba transformira se tako, da se jedna nepoznanica predoči kao racionalna funkcija druge nepoznanice, transformira u zbroj cijele i racionalne funkcije druge nepoznanice, a zatim se analizom druge funkcije izdvoje svi mogući slučajevi.

Primjer. Ako trebamo riješiti linearnu diofantsku jednadžbu $10x+3y-4=0$, onda je najprije transformiramo na oblik $y=-3x+\frac{1-x}{3}$, a zatim ispitujemo za koje je vrijednosti x drugi pribrojnik cio broj.

3. Metoda parnosti. Pri rješavanju diofantskih jednadžbi često je vrlo korisno podsjetiti se na podjelu skupa cijelih brojeva na parne i neparne brojeve. Metoda parnosti sastoji se u tome da se u zadanoj diofantskoj jednadžbi odredi parnost jedne od nepoznanica i na temelju toga zaključuje ima li jednadžba cjelobrojno rješenje ili ne.

Primjer. U linearnoj diofantskoj jednadžbi $(n^2+n+2)x+2y=1$ pribrojnici na lijevoj strani uvijek su parni brojevi, a desna strana je neparan broj, pa jednadžba nema cjelobrojno rješenje x, y ni za jedan cijeli broj n.

4. Metoda posljednje znamenke. Cijeli brojevi imaju razna svojstva. Mnoga od njih odnose se na njihove posljednje znamenke, znamenke jedinica. Ona se posebno promatra pri određivanju parnosti, djeljivosti sa 2, 5 i 10, ispitivanja ostatka pri dijeljenju s nekim brojem i dr. Metoda se sastoji u tome da se u zadanoj diofantskoj jednadžbi odrede posljednje znamenke brojeva na lijevoj i desnoj strani i da se na temelju toga izvede zaključak ima li jednadžba cjelobrojno rješenje ili ne.

Primjer. U kvadratnoj diofantskoj jednadžbi $5x+2y^2=2001$ prvi pribrojnik završava sa 0 ili 5, drugi pribrojnik završava sa 0,2 ili 8, pa $5x+2y^2$ završava jednom od znamenki 0,2,3,5,7 ili 8. Uspoređivanjem posljednjih znamenki brojeva na lijevoj i desnoj strani dolazimo do zaključka da ne postoje cijeli brojevi x i y koji zadovoljavaju tu jednadžbu.

5. Metoda nejednakosti. Skup u kojem rješavamo neku diofantsku jednadžbu obično je preširok s obzirom na krajnji rezultat rješavanja. Bit metode nejednakosti sastoji se u sužavanju područja mogućih vrijednosti nepoznanica u jednadžbi i razmatranju slučajeva u tako dobivenom suženom skupu.

Primjer. Treba riješiti jednadžbu

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \quad (x<y<z)$$

u skupu prirodnih brojeva. Je li ovo diofantska jednadžba? Jest, samo nema prikladan oblik. Nakon množenja sa zajedničkim nazivnikom xyz vidimo da je to kubna diofantska jednadžba. Pri tješavanju te jednadžbe najprije se zaključuje da mora biti $x>1$, a zbog uvjeta $x<y<z$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}>1$, tj. $x<3$. Dakle je $x=2$. Sada se uvrsti ta vrijednost u jednadžbu i nastavlja se razmatranjem druge nepoznanice i td.

Ako nastavnik upozna učenike s opisanim metodama na nizu prikladno odabranih primjera, učenici će kod svake nove jednadžbe moći bez velike pripreme i nervoze početi s njezinim rješavanjem (v. [4]).

NAPOMENE

Metodičke radionice su noviji oblik cjeloživotnog usavršavanja nastavnika matematike, ali tu već imamo vrlo korisna i dobra iskustva. Dosad je održano 14 metodičkih radionica u kojima je obrađivano sljedećih 8 tema: GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE (primjena računala), NEJEDNAKOSTI, MATEMATIČKI ZADATAK S VIŠE NAČINA RJEŠAVANJA, DOKAZIVANJE U NASTAVI MATEMATIKE, METODE RJEŠAVANJA DIOFANTSKIH JEDNADŽBI, MATEMATIČKI POJMOVI- DEFINICIJA, LIKOVI I TIJELA (primjena računala) i PRESLIKAVANJA RAVNINE (primjena računala). Za sve radionice bili su pripremljeni odgovarajući pisani materijali. Pobliže o njima možete naći u [2],[3],[4], [5],[6],[7] i [9]. Osim toga, svaka će tema biti detaljnije obrađena u posebnoj knjižici.

Časopis MiŠ povremeno ima rubriku *Metodička radionica*. Izdvajamo dva priloga iz te rubrike. U [8] opisana je radionica MATEMATIKA KROZ DIDAKTIČKE IGRE i pokazano kako se kroz igre stjecanje znanja može učiniti ugodnijim i djelotvornijim. Teme su bile: rješavanje jednadžbi s jednom nepoznanicom i likovi i formule (VI. Razred). Radionica može biti poticaj za obradu drugih sadržaja na sličan način. U [1] opisan je PANO U MATEMATIČKOJ UČIONICI. Panoi u školi, ne samo u matematičkoj učionici, mogu odigrati važnu ulogu u odgajanju i obrazovanju učenika. Osim što školu čine "životnijom", panoi privlače pozornost, obogaćuju znanje učenika i povećavaju interes za matematiku. U metodičkoj radionici PANOI mogu se estetski, stručno i na zanimljiv nači obraditi i predočiti mnogi sadržaji iz nastavnih programa, ali i mnogi dodatni sadržaji. Izbor je velik: i mi smo se natjecali, veliki matematičari, iz zabavne matematike, matematičke igre, fraktali, simetrija u prirodi, matematika i život, jeste li znali?, zanimljivosti i dr.

Ovaj članak treba biti i poticaj čitateljima da sudjeluju u iznošenju novih ideja i osmišljavanju novih metodičkih radionica. Alat svi imamo. Počnimo razmišljati!

Literatura

[1] D. Glasnović, *Pano u nastavi matematike*, Matematika i škola 8 (2001), 106–110.

[2] Z. Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Zbornik readova stručno-metodičkog skupa, Rovinj 1999, 77–91.

[3] Z. Kurnik, *Suvremena metodika i nastava matematike*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, Zagreb 2000, 187–201.

[4] Z. Kurnik, *Metode rješavanja diofantskih jednadžbi*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore, Makarska 2001, 58–67.

[5] Z. Kurnik, *Matematički pojam*, Matematika i škola 11 (2001), 8–16.

[6] Z. Kurnik, *Matematički pojam*, Zbornik radova stručno-metodičkog skupa, Rovinj 2001, 38–52.

[7] Z. Kurnik, *Geometrijske konstrukcije*, Poučak 9 (2002), 34–41.

[8] R.K. Kurtović, *Kvalitetna škola*, Matematika i škola 7 (2000), 72–75.

[9] Ž. Milin-Šipuš, J. Gusić, *Geometrijska radionica*, Zbornik radova 6. susreta nastavnika matematike, Zagreb 2002, 293–301.