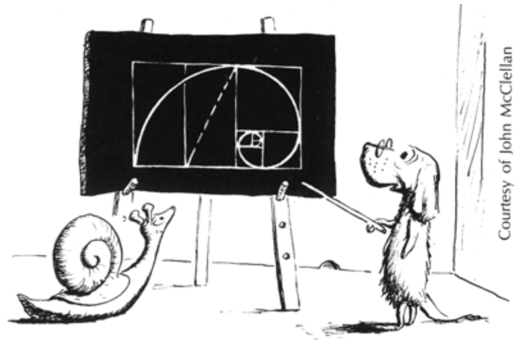


800 godina stari zečevi

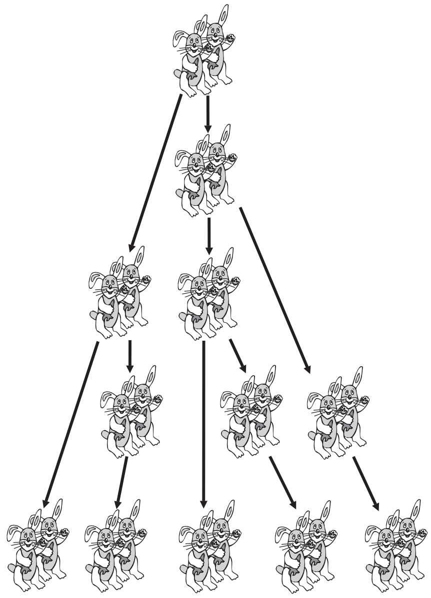
Branimir Dakić, Zagreb

Prije 800 godina Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci, objavio je svoju vrlo čuvenu knjigu *Liber abaci*. Ovaj je tekst posvećen upravo toj obljetnici.

Fibonacci je rođen oko 1170. a umro je oko 1250. godine. Bio je sin talijanskog trgovca Guglielma Bonaccia, po ocu je i dobio nadimak. Leonardov je otac u gradu Bugia (suvremeno francusko ime grada je Bougie) na sjevernoj obali Alžira imao trgovinu u kojoj je Leonardo rano naučio osnove aritmetike i arapski jezik. Putujući poslom po Egiptu, Siriji, Grčkoj i Siciliji izučavao je tamošnja praktična ali i opća matematička znanja. Vrativši se kući objavio je 1202. godine spomenutu *Knjigu o abaku.* Knjiga je podijeljena u 15 poglavlja u kojima se uz praktične račune iz gospodarstva i trgovine obrađuju i neke *čisto* matematičke teme, kao što su čitanje i pisanje brojeva u hindu i arapskom sustavu, neodređene jednadžbe, postupak određivanja drugog i trećeg korijena, itd. U istoj knjizi nalazi se i sljedeći vrlo popularan zadatak:

Ako svaki par zečeva dade svega dva para zečeva, jedan par sljedeće generacije i još jedan par generacije koja slijedi, nakon čega ugine, koliko će parova zečeva biti u n-toj generaciji, uz pretpostavku da na početku imamo jedan jedini par?

Promotrimo pozorno sljedeću sliku koja ilustrira zadatak.



Označimo li s f_i broj parova u i-toj generaciji, tada možemo zapisati:

$$f_1 = 1, \quad \text{(početni, prvi par)}$$
$$f_2 = 1, \quad \text{(par koji je neposredni potomak prvoga para)}$$
$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

Na ovaj je način definiran niz brojeva u kojem je svaki član, osim prva dva, zbroj dvaju koji mu neposredno prethode:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,$$
$$89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

koji se zove **Fibonaccijev niz**. Članovi niza su Fibonaccijevi brojevi.

Očito, zadatak zahtijeva određivanje n-tog člana ovog niza, broja f_n. Ako je n velik, tada ispisivanje svih n prvih članova niza nema smisla, pa je jedan od zadataka odrediti formulu općeg člana niza. Tu je formulu, čini se, prvi pronašao Francuz Jacques Philippe Marie Binet (1786.-1856.) pa se po njemu i zove **Binetova formula**. Ona glasi:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Provjera njezine valjanosti lijepa je vježba primjene matematičke indukcije.

Fibonaccijev zadatak o zečevima ima čitav niz vrlo zanimljivih i neočekivanih nastavaka. Evo jednog od njih.

Promatramo li niz $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ količnika po dvaju uzastopnih članova niza, primijetit ćemo kako taj niz teži prema broju $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$. Taj broj je zanimljiv jer je riječ o zlatnom rezu dužine duljine 1.

Naime, ako dužinu duljine 1 podijelimo na dva dijela tako da je omjer duljina većeg dijela i dužine jednak omjeru duljina manjeg dijela i većeg dijela, kažemo da smo načinili **zlatni rez** dužine.

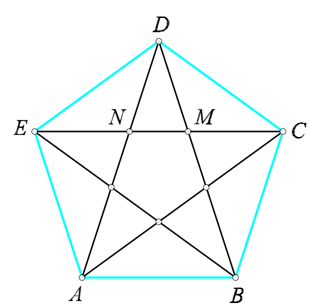
Prema slici bi bilo

$$x : 1 = (1-x) : x,$$

a odatle se dobije kvadratna jednadžba $x^2 + x - 1 = 0$. Njezino pozitivno rješenje $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ je duljina x, koja se najčešće označava slovom τ. Uočimo da je dužina na ovaj način podijeljena na dva dijela od kojih je jedan približno 61.8%, a drugi približno 38.2% njezine duljine.

Ova veza Fibonaccijevog niza i zlatnog reza uistinu je dojmljiva. Jer zlatni se rez dužine pojavljuje u najrazličitijim situacijama. Primjerice, poznata je činjenica da se dijagonale pravilnog peterokuta sijeku u točkama koje su zlatni rezovi dijagonala.

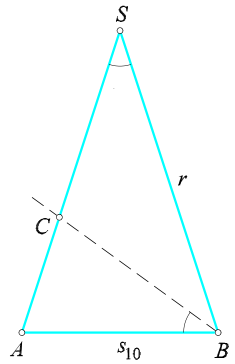
Tako su točke M i N zlatni rezovi dijagonale $\overline{EC}$.



Kad u karakterističnom trokutu $\triangle ABS$ pravilnog deseterokuta povučemo simetralu kuta uz osnovicu trokuta, ona od njega odsiječe sličan trokut $\triangle ABC$. Točka C zlatni je rez dužine $\overline{AS}$. To izravno slijedi iz omjera

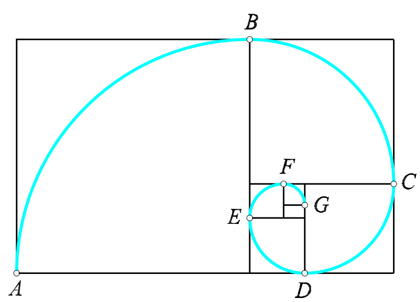
$$s_{10} : r = (r - s_{10}) : s_{10}.$$

Trokut s unutarnjim kutovima 72°, 72°, 36° zbog ove se osobine često zove **zlatni trokut**.



Njegovo opisano svojstvo koristimo pri konstrukciji pravilnog deseterokuta, pa onda i pravilnog peterokuta.

No, kao što postoji *zlatni trokut*, tako imamo i **zlatni pravokutnik**. To je pravokutnik čije su dvije stranice dijelovi dužine dobiveni njezinim zlatnim prerezom. *Zlatni pravokutnik* gotovo nam je neprestance pred očima. Naime, brojni predmeti i građevine u našoj neposrednoj okolini toga su oblika. *Zlatni pravokutnik* se drži osobito skladnim pa su toga oblika formati većine knjiga i slika, a i u graditeljstvu se o toj činjenici vodi računa pa su često pročelja kuća (sve od čuvenog Partenona, hrama grčke božice Atene) zlatni pravokutnici.

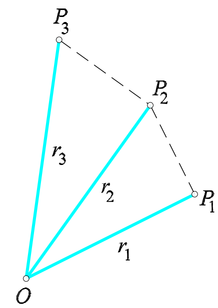


Zlatni pravokutnik ima ovo zanimljivo svojstvo: Kad od njega odsiječemo kvadrat sa stranicom čija je duljina jednaka duljini kraće stranice pravokutnika, ostatak je *zlatni pravokutnik*. Nastavimo li tako, dobit ćemo prethodnu sliku. No tu nas čeka još jedno iznenađenje; točke $A, B, C, D, E, F, G, \ldots$ pripadaju jednoj osobitoj krivulji, **logaritamskoj spirali**. Baš zbog navedenog, ponekad je zovu još i **zlatna spirala**. Jacob Bernoulli nazvao ju je *spira mirabilis*, divna spirala.

Približnu sliku te spirale dobit ćemo ucrtavanjem niza kružnih lukova u odrezane kvadrate (vidi sliku).

Nikako ne smijemo miješati *zlatnu* i *Arhimedovu spiralu*.

Arhimedova je spirala trag što ga ostavlja točka koja se istovremeno jednoliko giba po pravcu i po kružnici.



Zamislimo da je O pol u kojem je centar *Arhimedove spirale* i uočimo na njoj neke tri točke P_1, P_2 i P_3 uz pretpostavku da su kutovi $\sphericalangle P_2OP_1$ i $\sphericalangle P_3OP_2$ sukladni. Duljine polarnih polumjera tih točaka, dužine r_1, r_2 i r_3 čine aritmetički niz. I to je osnovno svojstvo te spirale.

Ako su pak (uz iste oznake) brojevi $\log r_1$, $\log r_2$ i $\log r_3$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, onda točke P_1, P_2 i P_3 leže na logaritamskoj spirali. Tada dakle vrijedi jednakost $r_3 = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$.

U prirodi na *zlatnu spiralu* nailazimo uistinu često. Engleski prirodoslovac D'Arcy W. Thompson (1860.-1948.) u svojem sada već klasičnom djelu *"O rastu i obliku"* detaljno je obradio ulogu zlatne spirale u oblicima brojnih prirodnih formi, među kojima su razne školjke, rogovi, kljove, suncokret itd. Sir Theodore Andrea Cook objavio je 1914. knjigu *“Krivulja života”* u potpunosti posvećenu zlatnoj spirali i njezinu mjestu u prirodi i umjetnosti. Edward B. Edwards je 1932. dao čitav niz lijepih i simetričnih uzoraka čija je podloga ova krivulja. Tu je još i nezaobilazni Escher i mnogi drugi.

Na osobini logaritamske spirale da sve svoje radijvektore siječe pod istim kutom, zasnivaju se raznovrsne primjene ove krivulje u tehnici. Spomenimo rotirajuće noževe u različitim strojevima za rezanje, zatim cijevi kojima se dovodi voda na rotor turbine, razne zupčanike itd.

Jedan manji izbor lijepih primjera *zlatne spirale* naći ćete u našem *Panoptikumu*.

A na naslovnici ovog MŠ-a vidimo sliku orkana *Bonnie* snimljenog sa Space Shuttlea *Endeavour*. Njegov spiralni oblik lako je uočiti.

Dostupna literatura na hrvatskom jeziku

[1] B. Dakić, *Matematički panoptikum,* Školska knjiga, Zagreb, 1995.

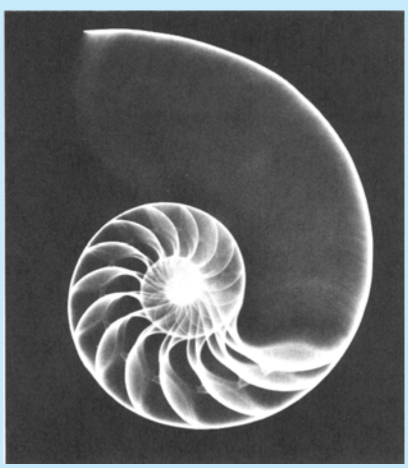
[2] A. Dujella, *Fibonaccijev niz,* HMD, Zagreb, 2001.

[3] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[4] D. Žubrinić, *Božanski ili zlatni omjer,* MFL 2/194, 1998.-99.

Nadgrobni spomenik Jacoba Bernoullija u Baselu, u Švicarskoj. Njegova želja da se logaritamska spirala ugravira na grob bila je ispunjena, no klesar je ugravirao pogrešnu spiralu — Arhimedovu umjesto logaritamske!

NAUTILUS ili indijska lađica, *morski je organizam blizak sipi, lignji ili hobotnici. Živi u vodama tropskog Zapadnog Pacifika u teško dostupnim područjima, u šumama koraljnih grebena. Vješto se kreće na dubinama između 90 m i 450 m te kao rijetko koje živo biće lako podnosi veće promjene tlaka i temperature.*



Grabežljivac je, hrani se račićima i sitnom ribom koje hvata sa svojih 38 ili više pipaca.

Nautilus se gotovo nije promijenio u posljednjih 500 milijuna godina pa ga često zovu “živući fosil”. Zbog toga je zanimljiv paleontolozima, ekolozima i drugim znanstvenicima koji njegovim proučavanjem žele prodrijeti u tajnu života u moru u davna vremena.