Primjer

Zdravko Kurnik, Zagreb

U svakom udžbeniku matematike susrećemo dijelove nastavnih sadržaja koji se nazivaju **primjeri**. Primjeri igraju važnu ulogu u nastavnom procesu. Pomoću njih ostvaruje se nekoliko načela nastave matematike kao što su načelo primjerenosti, načelo postupnosti, načelo zornosti i načelo interesa. Također pomoću njih ostvaruje se niz općeobrazovnih i odgojnih ciljeva nastave matematike, među ostalim jednostavnost i jasnoća matematičkog jezika i njegovanje interesa za učenje matematike.

Primjeri se razlikuju prema svojoj obrazovnoj ulozi. Da bi se uporabom primjera postigao najbolji obrazovni učinak, potrebna je njihova pažljiva i primjerena metodička priprema i obrada.

U ovom članku opisat ćemo vrste primjera i dati jedan mali izbor primjera za različite nastavne situacije. Razmatranja koja slijede nastavnik matematike može lako proširiti vlastitim promišljanjima. Važno je da pri uporabi nekog primjera nastavnik ima pred sobom jasan obrazovni cilj koji se odabranim primjerom želi postići. Primjer ne smije biti običan i nevažan zadatak.

A) Definicijski primjeri

Najjednostavniju vrstu čine primjeri koji konkretiziraju definicije apstraktnih matematičkih pojmova. Njihova je namjena postizanje jasnoće i bolje razumijevanje definiranih pojmova. Za ilustraciju navest ćemo nekoliko pojmova i konkretnih primjera.

1) Sustav $a_1x+b_1y=c_1,\ a_2x+b_2y=c_2$, gdje su $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ racionalni brojevi, naziva se *sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice.*

- Primjeri sustava:
  $5x=3,\ -7y=2;$
  $9x=1,\ x-4y=0;$
  $x+y=8,\ \ x-6y=-10;$
  $3x+\frac{1}{5}y=-\frac{4}{7},\ -\frac{9}{10}x+\frac{2}{3}y=85.$

2) Funkcija $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ definirana formulom $f(x)=ax+b$, gdje su a, b racionalni brojevi i $a\neq 0$, naziva se *polinom prvog stupnja* ili *linearna funkcija*.

- Primjeri linearnih funkcija:
  $f(x)=x,\quad f(x)=-15x,$
  $f(x)=-\frac{1}{6}x,\quad f(x)=4x+\frac{5}{8},$
  $f(x)=-\frac{3}{11}x+\frac{1}{2}.$

3) Funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definirana sa $f(x)=ax^2+bx+c$, gdje su a, b, c realni brojevi i $a\neq 0$, naziva se *polinom drugog stupnja* ili *kvadratna funkcija*.

- Primjeri kvadratnih funkcija:
  $f(x)=8x^2,\quad f(x)=-5x^2+\sqrt{2}x,$
  $f(x)=\frac{3}{4}x^2-6,\quad f(x)=x^2-2x+1,$
  $f(x)=10x^2-\frac{2}{7}x+99.$

4) Jednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi u eksponentu potencije zove se *eksponencijalna jednadžba*.

- Primjeri eksponencijalnih jednadžbi:

$3^x = 81,\quad 2^{x-1} + 2^{x-2} - 2^{x-3} = 5,$
$3^{2x} - 7^{x+1} + 3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 7^{x-1} - 7^{x-2} = 0,$
$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0,\quad 6 \cdot 16^x - 4^x - 1 = 0,$
$4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0,\quad 100^x - 5 = 0.$

Iako je za svaki definirani pojam lako navesti niz primjera, ipak pri izboru treba paziti na raznolikost koeficijenata ili posebnih slučajeva. Tako su među primjerima eksponencijalnih jednadžbi navedeni svi oblici koji se susreću u srednjoškolskoj matematici. Slično treba postupati pri navođenju primjera i za druge pojmove.

B) Motivacijski primjeri

Matematika ima široku primjenu u mnogim područjima života i mnogim znanostima. Za opis i bolje razumijevanje konkretnih problema i pojava često služe apstraktni matematički pojmovi. Drugu vrstu čine upravo primjeri problema i pojava iz stvarnog života kojima je svrha jedna motivacija potrebe obrade takvih pojmova u nastavi matematike.

1) Primjeri za obradu *linearne funkcije*:

- Brzina tijela u ovisnosti o vremenu, linearno rastezanje metalnog štapa pri zagrijavanju, volumno rastezanje čvrstih tijela pri zagrijavanju, promjena stanja plina, veza Celsiusovih i Fahrenheitovih stupnjeva dani su relacijama

$$v_t = v_o + at,\quad l_T = l_o + bT,$$
$$V_T = V_o + cT,$$
$$pV = nRT \quad (V \text{ konstantno ili } p \text{ konstantno}),$$
$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32.$$

2) Primjeri za obradu *kvadratne funkcije*:

- Put d kod slobodnog pada u ovisnosti o vremenu t izražen je formulom

$$d = \frac{1}{2}gt^2.$$

- Ako se iz topničkog oruđa kojemu je cijev nagnuta prema horizontalnoj ravnini pod kutom α ispali hitac s početnom brzinom v_0, onda će koordinate x i y njegova težišta biti povezane relacijom

$$y = -\frac{g}{2v_\alpha^2 \cos^2\alpha}x^2 + x \operatorname{tg}\alpha$$

(ishodište pravokutnog koordinatnog sustava je u težištu zrna u času mirovanja).

U oba primjera zavisnost opisuje kvadratna funkcija. Kako su grafovi kvadratnih funkcija parabole, primjeri mogu poslužiti i kao motivacija za uvođenje pojma *parabole*.

3) Primjeri za obradu *eksponencijalne funkcije*:

- Složeno ukamaćivanje. To ukamaćivanje banke provode na sljedeći način: Na uloženu svotu G_0 banka nakon prve godine pripisuje kamate od p posto i štediša ima svotu $G_1 = G_0 + \frac{G_0 p}{100} = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Sljedeće godine kamate se pripisuju na povećanu svotu G_1 itd. Ako je svota G_0 uložena na n godina, onda će nakon tog vremena štediša imati u banci svotu

$$G_n = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Porast svote je eksponencijalan.

- Radioaktivni raspad. Pri radioaktivnom raspadu količina tvari mijenja se u ovisnosti s vremenom po zakonu kojeg opisuje eksponencijalna funkcija oblika

$$M(t) = M_0 a^{-kt}.$$

U ovoj formuli je M_0 količina radioaktivne tvari u početnom trenutku, t vrijeme raspada, k konstanta radioaktivnog raspada, a M količina tvari nakon vremena t.

- Slični zakoni opisuju promjenu atmosferskog tlaka s promjenom nadmorske visine i razmnožavanje nekih kultura bakterija.

4) Primjeri za obradu *elipse*:

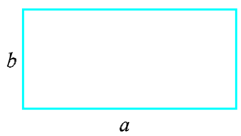
- Planeti se gibaju oko Sunca po elipsama, pri čemu se Sunce nalazi u jednom žarištu elipse (*prvi Keplerov zakon*).
- Elektroni u atomu kruže oko jezgre po elipsama.
- Sateliti se gibaju oko Zemlje po putanjama koje su približno elipse.
- Svojstva elipse koriste se u tehnici pri izradi nekih alata, gdje postoje zupčasti dijelovi koji imaju eliptički oblik.

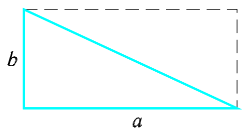
C) Uvodni primjeri

Primjeri u udžbenicima najčešće su zadaci, posebno odabrani i s posebnom namjenom. Oni mogu biti standardni i nestandardni, ali pretežno su ipak jednostavni, standardni zadaci. Ovdje ćemo razmotriti primjere koji se u udžbenicima nalaze na početku odjeljaka. Takvi primjeri su tada posebne vrste zadataka kojima se razjašnjava način rješavanja nekog teoretskog pitanja.

1) Površina trokuta. Za izvođenje formule za površinu bilo kojeg trokuta potrebno je poznavanje formule za površinu pravokutnog trokuta. Tu formulu otkrivamo u sljedećem uvodnom primjeru:

- Promatrajmo pravokutnik sa stranicama duljina a i b i pravokutni trokut s katetama duljina a i b.





Odranije znamo da je površina P pravokutnika sa stranicama duljina a i b dana formulom $P = a \cdot b$.

Pravokutni trokut s katetama duljina a i b može se dopuniti do pravokutnika kojemu su stranice katete tog trokuta. Na taj način dobivamo dva sukladna pravokutna trokuta. Površina svakog od njih jednaka je polovini površine pravokutnika.

Prema tome, površina P pravokutnog trokuta s katetama duljina a i b dana je formulom

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b.$$

Idući korak je izvođenje slične formule za površinu bilo kojeg trokuta primjenom nađene formule za površinu pravokutnog trokuta. Uvodni primjer postigao je svoj cilj.

2) Metoda supstitucije. U nastavi matematike u osnovnoj školi učenici upoznaju dvije metode rješavanja sustava dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice: *metodu supstitucije* i *metodu suprotnih koeficijenata*. Neki udžbenici obrađuju i treću metodu, *metodu komparacije*. Ono što se u njima može naći kao bitan metodički nedostatak su dvije činjenice: uvodni primjeri nisu ponekad najbolje odabrani i manjka usporedba metoda. Nije uvijek svejedno koja se metoda primjenjuje.

Uvodni primjeri za metodu supstitucije:

- Riješimo sustav

$$x = 4, \quad 2x + 5y = 3.$$

Vrijednost prve nepoznanice već je poznata. Treba naći drugu nepoznanicu. Uvrstimo li vrijednost 4 za x u drugu jednadžbu, dobivamo $2 \cdot 4 + 5y = 3$. Ovo je linearna jednadžba za y. Njezino rješenje je $y = -1$. Rješenje sustava je uređeni par $x = 4, y = -1$.

- Riješimo sustav

$$x - 10y = -5, \quad 4x + 7y = 34.$$

Prvi primjer daje nam ideju rješavanja. Iz prve jednadžbe izrazimo prvu nepoznanicu x pomoću druge y i dobivamo $x = 10y - 5$. Uvrstimo $10y - 5$ umjesto x u drugu jednadžbu. Za nepoznanicu y dobivamo linearnu jednadžbu $4(10y-5)+7y=34$. Njezino rješenje je $y=2$. Uvrstimo 2 umjesto y u jednadžbu $x=10y-5$ i nalazimo $x=5$. Rješenje polaznog sustava je uređen par $x=5, y=2$.

Sada se potpuni opis primjene metode supstitucije metodički razrađen po koracima može dati rješavanjem jednog složenijeg primjera.

- Riješimo sustav

$$8x+5y=-7, \quad 3x-4y=\frac{9}{10}.$$

Metoda supstitucije primjenjiva je u svim slučajevima, ali nije uvijek i najprikladnija kao što pokazuje ovaj primjer:

- Riješimo sustav

$$105x-67y=9, \quad 11x+67y=223.$$

Metoda supstitucije svodi rješavanje ovog sustava na linearnu jednadžbu u kojoj se pojavljuje nešto složeniji račun s razlomcima. Međutim, lako se uočava da je ovdje mnogo prikladnija i brža primjena metode suprotnih koeficijenata.

3) Primjeri za uvođenje pojmova *kvadrat broja, kvadriranje, drugi korijen* i *korjenovanje* podrobno su opisani u [2]. U tom članku čitatelj može naći neke metodičke razlike obrade tih pojmova u odnosu na obrade u udžbenicima.

4) Rješavanje kvadratne jednadžbe. U ovoj nastavnoj jedinici najprije se razmatraju posebni slučajevi $ax^2+bx=0$ i $ax^2+c=0$. Za ove slučajeve ne trebaju uvodni primjeri, jer je način njihovog rješavanja dosta uočljiv i prirodan.

Nakon obrade posebnih slučajeva prelazi se na rješavanje općeg slučaja $ax^2+bx+c=0$. Pogledajmo uvodne primjere čije rješavanje sadrži ideju koja pomaže da se taj cilj ostvari.

- Riješimo jednadžbu $9x^2-24x+16=0$. Lako se uočava da je lijeva strana potpuni kvadrat, pa se jednadžba može napisati u obliku $(3x-4)^2=0$. Ona ima dvostruko rješenje $x_1=x_2=\frac{4}{3}$.
- Riješimo jednadžbu $x^2+8x+12=0$. Lijevu stranu jednadžbe nadopunit ćemo na potpuni kvadrat. Imamo redom

$$\begin{aligned}
&x^2+8x+12=0,\\
&(x^2+8x+16)-4=0,\\
&(x+4)^2=4,\\
&x+4=\pm 2.
\end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe su $x_1=-2$, $x_2=-6$.

- Riješimo jednadžbu $2x^2+5x+2=0$. Na lijevoj strani jednadžbe najprije iz prva dva pribrojnika izlučimo 2, a onda nadopunjavamo na potpuni kvadrat kao u prethodnom primjeru. Imamo redom

$$\begin{aligned}
&2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+2=0,\\
&2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)-\frac{25}{8}+2=0,\\
&2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{8},\\
&\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16},\\
&x+\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4}, \quad x_1=-\frac{1}{2}, \ x_2=-2.
\end{aligned}$$

Nije teško otkriti metodičke razloge i svrhu rješavanja ovih primjera prije izvođenja formula za rješenja opće kvadratne jednadžbe. Potpuni kvadrat u prvoj jednadžbi ukazuje na prvi korak u rješavanju druge jednadžbe, nadopunjavanje na potpuni kvadrat. Rješavanje druge jednadžbe ukazuje na način rješavanja treće jednadžbe, gdje je prije toga potrebno samo izlučiti vodeći koeficijent. Sada primjenom *analogije* učenici mogu lakše i brže shvatiti postupak nalaženja traženih formula za rješenja opće kvadratne jednadžbe:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

D) Primjeri utvrđivanja

Razmotrimo i primjere koji se u udžbenicima nalaze pri kraju odjeljaka. Takvi primjeri obično su standardni zadaci kojima je uloga neposredna primjena izvedenog pravila, zakona, formule ili dokazanog poučka. I u ovim primjerima još ima mjesta za poneko dodatno metodičko objašnjenje.

1) Površina pravokutnog trokuta. U točki 1) prethodnog odjeljka promatrali smo kao uvodni primjer površinu pravokutnog trokuta. Utvrđivanje izvedene formule $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ nastavnik treba započeti rješavanjem dva primjera.

- Pravokutni trokut s katetama duljina $a = 8\,\text{cm}$ i $b = 5\,\text{cm}$ ima površinu $P = \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 20\,\text{cm}^2$.
- Površina pravokutnog trokuta je $P = 51\,\text{cm}^2$, a duljina jedne njegove katete $a = 17\,\text{cm}$. Izračunajmo duljinu b druge katete. Prema formuli za površinu pravokutnog trokuta je $51\,\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot 17\,\text{cm} \cdot b$. Odavde nalazimo $b = 6\,\text{cm}$.

2) Zbroj unutarnjih kutova mnogokuta. Ova nastavna jedinica ima za cilj otkriti poučak o zbroju K_n svih unutarnjih kutova mnogokuta sa n stranica, tj. n-terokuta. Do njegove izreke dolazi se razmatranjem uvodnih primjera $K_3 = 180°$ (predznanje), $K_4 = 360°$ (predznanje), $K_5 = 540°$, $K_6 = 720°$. Poučak:

Zbroj K_n svih unutarnjih kutova n-terokuta dan je formulom $K_n = (n-2) \cdot 180°$.

Poželjno je da nastavnik objasni učenicima dvostruko značenje ove formule. S jedne strane, pomoću te formule za svaki prirodni broj $n > 2$ izračunava se zbroj svih unutarnjih kutova n-terokuta. S druge strane, formula omogućuje da se za neki zadani kut ispita postoji li mnogokut kojemu je taj kut zbroj svih unutarnjih kutova. Zadani kut mora biti višekratnik kuta od 180°. To objašnjenje ilustrira se sljedećim primjerima:

- Zbroj svih unutarnjih kutova sedmerokuta je $K_7 = (7 \cdot 2) \cdot 180° = 900°$, osmerokuta $K_8 = (8-2) \cdot 180° = 1080°$, deveterokuta $K_9 = (9-2) \cdot 180° = 1260°$ itd.
  Primjer se može prikazati i u obliku tablice:

n	3	4	5	6	7	8	9
K_n	180°	360°	540°	720°	900°	1080°	1260°

- Ispitajmo postoji li mnogokut kojemu je zbroj svih unutarnjih kutova
  a) 3060°, b) 5160°.

  a) Iz jednakosti $3060° = (n-2) \cdot 180°$ treba odrediti prirodni broj n. Budući da je broj 3060 djeljiv brojem 180 i pripadni kvocijent je jednak 17, to vrijedi $17 \cdot 180° = (n-2) \cdot 180°$. Odavde zaključujemo da je $17 = n-2$, pa je $n = 19$. Mnogokut kojemu je zbroj svih unutarnjih kutova 3060° je devetnaesterokut.

  b) Iz jednakosti $5160° = (n-2) \cdot 180°$ treba odrediti prirodni broj n. Međutim, broj 5160 nije djeljiv brojem 180, pa ne postoji prirodan broj koji zadovoljava gornju jednakosti. Ne postoji mnogokut kojemu je zbroj svih unutarnjih kutova 5160°.

Sigurno je da nakon ovih primjera učenici bolje razumiju izvedenu formulu. To će uostalom pokazati zadaci za utvrđivanje koji iza primjera slijede.

U jednom udžbeniku opća formula za zbroj K_n izvedena je kao primjer što svakako nije u skladu s onim što se metodički podrazumijeva pod primjerom.

3) Rješenja kvadratne jednadžbe. U prethodnom odjeljku razmatrano je pitanje rješavanja kvadratne jednadžbe i opisani uvodni primjeri. Pogledajmo sada primjere koji služe za utvrđivanje stečenog znanja.

Postupak rješavanja kvadratne jednadžbe oblika $ax^2 + bx = 0$ razjašnjavamo ovim primjerima:

- Riješimo jednadžbu
$$6x^2 + 8x = 0.$$
Izlučivanjem zajedničkog faktora $2x$ dobivamo $2x(3x+4) = 0$. Odavde nalazimo rješenja $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{4}{3}$.
- Riješimo jednadžbu
$$(x-3)(x+2) + (x+1)(x+6) = 0.$$
Nakon množenja zagrada jednadžba se svodi na oblik $x^2 + 3x = 0$. Dakle, $x_1 = 0$, $x_2 = -3$.
- Riješimo jednadžbu $\frac{4x}{x-2} + \frac{x-2}{2x+3} = -\frac{2}{3}$.

  Jednadžbu pomnožimo sa zajedničkim nazivnikom $3(x-2)(2x+3)$ i dobivamo $12x(2x+3) + 3(x-2)^2 = -2(x-2)(2x+3)$, a nakon pojednostavnjenja $31x^2 + 22x = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{22}{31}$.

Postupak rješavanja kvadratne jednadžbe oblika $ax^2 + c = 0$ može se također razjasniti prikladnim primjerima. Navodimo ih samo kao mogući izbor.

- Riješimo jednadžbe:
a) $9x^2 - 4 = 0$,
b) $(x-1)(x+4) - 3x = 0$,
c) $\frac{x+6}{x} = \frac{5x}{2x-12}$.

Evo i izbora primjera za primjenu formula za rješenja opće kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$:

- Riješimo jednadžbe:
a) $6x^2 + 11x - 10 = 0$,
b) $(4x-5)(4x+3) + 16 = 0$,
c) $\frac{2x+3}{x} - \frac{6}{x+1} = \frac{7}{5}$.

Nakon što nastavnik obradi ovakve primjere, učenici bi trebali biti spremni na rješavanje složenijih zadataka o kvadratnoj jednadžbi.

Zaključak

1) Osnovni cilj ovog članka bio je ukazati na obrazovnu ulogu **primjera** u nastavnom procesu. Nerijetko se uporaba primjera ne koristi na najbolji način. Posebno nastavnici početnici imaju poteškoća s razlikovanjem uloge primjera i zadataka u nastavnom procesu, što se često vidi pri hospitiranju studenata i stručnim ispitima. Time se smanjuje razina razumijevanja novog gradiva.

2) Nerazumijevanje uloge primjera najbolje se uočava u trenutku kada nastavnik primjer daje da rješavaju sami učenici. Zbog njegove jasne i važne namjene postizanja jasnoće i razumijevanja teoretskog pitanja od strane **svih** učenika, primjer treba razrješavati i objašnjavati nastavnik. Naravno, poželjna je i dobro došla aktivna suradnja učenika. Tek nakon toga može se prijeći na jednostavnije zadatke koje rješavaju učenici i kojima se utvrđuje novostečeno znanje.

3) Svaki puta kad izostane neki potreban primjer, to može značiti slabiju jasnoću i nerazumijevanje novog gradiva. Izbor primjera je važno pitanje nastave matematike. U nekim udžbenicima izbor nije učinjen na najbolji način. Budući da nastava matematike ne smije biti puko prepričavanje udžbenika, to daje mogućnost nastavniku da prikladnijim izborom primjera i vrsnijom metodičkom obradom poveća uspješnost nastave.

4) Pravilan izbor primjera i zadataka za utvrđivanje novog gradiva jedna je od osobina **kreativnog** nastavnika matematike.

Literatura

[1] Z. Kurnik, *Matematički zadatak*, Matematika i škola 7 (2000), 51–58.
[2] Z. Kurnik, *Metodika uvođenja novih pojmova*, Matematika i škola 12 (2001), 55–59.