O predznaku broja

Branimir Dakić, Zagreb

Kojeg je predznaka broj $-x$?

Je li broj $-x$ pozitivan ili negativan?

Postavimo li ovo pitanje u razredu, često ćemo dobiti odgovor:

"*Taj je broj negativan.*"

Je li riječ o brzopletosti, o nerazumijevanju ili...? Bilo kako bilo, ovom se pitanju uvijek moramo vraćati jer je odgovor na njega vrlo značajan.

Postavljeno pitanje "*Je li broj $-x$ pozitivan ili negativan?*" povlači novo pitanje:

"*A kakav je x? Je li x pozitivan ili negativan? Reci mi kakav je x pa ću ti reći kakav je $-x$.*"

Upravo ovo pitanje predznaka broja $-x$ ometa razumijevanje opće definicije funkcije $f(x) = |x|$. U toj definiciji iskazujemo da je ta funkcija uvijek pozitivna (jedina je iznimka nula), te da je $|x| = x$, ako je $x \geq 0$, a $|x| = -x$, za $x < 0$.

Zanimljivo je kako se i inače o pitanjima predznaka broja pomalo čudno i neobjašnjivo razmišlja.

Tako primjerice rješavajući nejednadžbe oblika $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$ zaključujemo:

Količnik dvaju brojeva pozitivan je broj ako su djeljenik i djelitelj brojevi istog predznaka, dakle je

a) $ax + b > 0 \quad \text{i} \quad cx + d > 0$

ili

b) $ax + b < 0 \quad \text{i} \quad cx + d < 0.$

To razmatranje primijeni se potom na nekoliko konkretnih primjera. Ali, postavimo li primjerice zadatak da se riješi nejednadžba $\dfrac{3}{1-x} \leq 0$, nerijetko će učenik slijediti prethodno usvojeno razmišljanje:

Količnik dvaju brojeva negativan je broj ako su djeljenik i djelitelj brojevi suprotnog predznaka, tj.

a) $3 \geq 0 \quad \text{i} \quad 1 - x < 0$

ili

b) $3 \leq 0 \quad \text{i} \quad 1 - x > 0.$

Čudno, zar ne?

Slično se znade dogoditi i pri rješavanju nejednadžbi kao što su $\dfrac{2x^2+1}{x^2-4} > 0$ ili $\dfrac{-x^2-1}{2x-3} < 0$.

Učenik bi morao uočiti kako je broj $2x^2 + 1$ uvijek pozitivan (ne može biti manji od 1), a broj $-x^2 - 1$ je uvijek negativan (nije veći od -1).

Pitanje predznaka broja vrlo često se javlja baš uz zadatke vezane s nejednakostima i uz nejednadžbe. Naime, jedno od svojstava nejednakosti jest ono koje govori o množenju nejednakosti brojem. Pa ako nejednakost množimo s pozitivnim brojem, smisao nejednakosti se ne mijenja, a ako je množimo negativnim brojem, znak nejednakosti se okreće.

Na jednom školskom natjecanju učenika II. razreda postavljen je sljedeći zadatak:

Zadatak. Odredi sve realne brojeve a za koje je nejednakost

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \le a$$

ispunjena za svaki realni broj x.

Kako je zamišljeno rješenje?

Trebalo bi uočiti da je $x^2+x+1>0$ za svaki realni broj x te da je stoga dana nejednakost ekvivalentna sa

$$2x^2+2x+3 \le a(x^2+x+1).$$

Odatle se pak dobije nejednakost

$$(a-2)x^2+(a-2)x+a-3 \ge 0,$$

te se dalje rješavanje svodi na određivanje svih vrijednosti realnog parametra a za koje polinom s lijeve strane prima pozitivne vrijednosti (ili se poništava) za svaki realni broj x.

Iz poznatih uvjeta $a-2>0$ i $D \le 0$ dobit ćemo $a \ge \frac{10}{9}$.

A kako su zadatak rješavali učenici? Prebacili su a na lijevu stranu, proveli oduzimanje, itd.

Sličan je i sljedeći primjer:

Zadatak. Riješi nejednadžbu:

$$\frac{1-|x-2|}{1+|2-x|} > \frac{1}{3}.$$

I opet ćemo pomnožiti nejednadžbu pozitivnim brojem $3(1+|x-2|)$. Tako dobijemo nejednadžbu

$$3-3|x-2| > |x-2|+1,$$

a odatle slijedi $|x-2|<\frac{1}{2}$, odnosno, $-\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2}$.

Konačno rješenje jest $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$.

Primijetimo samo još kako smo pri rješavanju zadatka koristili još jednu činjenicu vezanu uz ovu temu, a to je da suprotni brojevi imaju jednaku apsolutnu vrijednost ($|2-x| = |x-2|$).

1 = 2

Sigurno je $1=\frac{2}{3-1}$. *No tada je i* $1=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-1}}$, *pa onda i*

$$1=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-1}}}.$$

Nastavljajući na jednak način, dobit ćemo

$$1=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\dots}}}}.$$

No, također je $2=\frac{2}{3-2}$, *odnosno*

$$2=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-2}}.$$

Dakle je $2=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\dots}}}}$.

Očigledno, dokazali smo tvrdnju

$$1=2.$$