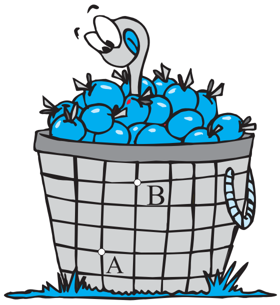


Najkraći put

Branimir Dakić, Zagreb

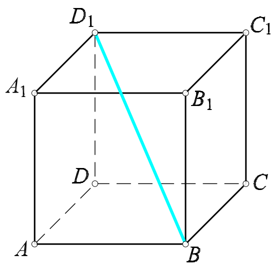
Najkraća spojnica dviju točaka u ravnini je dužina. To je jednostavna i jasna činjenica. A koja je najkraća spojnica dviju točaka na kružnici? Sad se prirodno upitati: A mora li ta spojnica cijela pripadati kružnici? Ako ne, i opet je to dužina. A ako da, onda je to kraći od dva kružna luka koji su određeni s dvije dane točke.

Kako ćemo odrediti najkraću spojnicu dviju točaka u prostoru? I ta je spojnica dužina. Ako pak te točke pripadaju nekoj plohi, primjerice sferi, koji je onda odgovor na isto pitanje? Zahtijeva li se još i da cijela spojnica pripada sferi, onda odgovor i nije sasvim jednostavan.

Eto, to su pitanja kojima ćemo se baviti u ovom članku.

Pauk i muha

Prostorna dijagonala kocke najkraća je spojnica između njezina dva dijagonalno suprotna vrha, primjerice vrhova B i D_1 (slika 1.). A koji je najkraći od putova koji vode iz B u D_1 po stranama kocke?



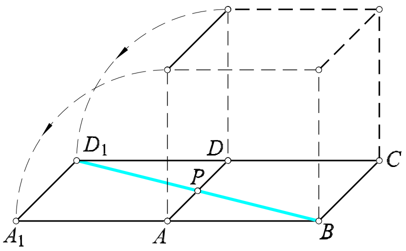
Sl. 1.

Riječ je o jednom poznatom problemu iz popularne matematike:

Kako će pauk doći do muhe ako je on u jednom vrhu prostorije u obliku kvadra, a muha u vrhu koji je ovome dijagonalno suprotan, a da put pritom bude najkraći moguć?

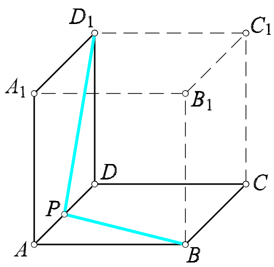
Zadatak ćemo riješiti ako je prostorija oblika kocke, tada je on nešto jednostavniji. Uzmimo da je pauk u vrhu B, a muha u vrhu D_1.

Promotrimo izdvojeno strane $ABCD$ i ADD_1A_1 kocke, kojima pripadaju vrhovi B i D_1. Preložimo stranu ADD_1A_1 oko brida $\overline{AD}$ tako da padne u ravninu $ABCD$ (slika 2.).



Sl. 2.

Spojimo zatim točke B i D_1 dužinom. Dužina $\overline{BD_1}$ je najkraća spojnica ovih dviju točaka. Njezina je duljina $a\sqrt{5}$. Vratimo stranu u prethodni položaj (slika 3.). Rješenje zadatka je očigledno. Valja još samo primijetiti kako postoji šest takvih putova i svi su oni jednake duljine. Pokušajte ih sve pronaći.

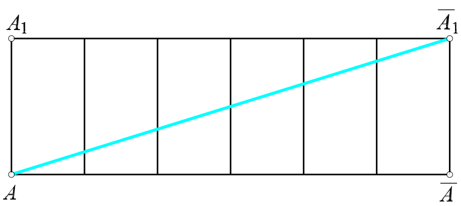


Sl. 3.

Pokušajte riješiti i zadatak o muhi i pauku koji je ipak malo drukčiji.

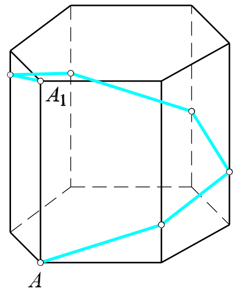
* * *

Slično kao što smo odredili najkraći put po kocki, odredit ćemo i najkraći put između dviju točaka na pobočju bilo koje prizme. Na slici je prikazan najkraći put koji polazi iz vrha A na donjoj osnovci, obilazi oko šesterostrane prizme te se penje do vrha A_1 na istom bridu na gornjoj osnovci.



Sl. 4.

Primjećujemo kako je uvaj uspon jednolik, pod stalnim je nagibom prema osnovci prizme.

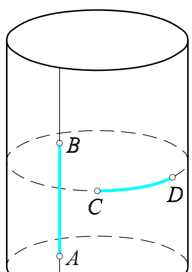


Sl. 5.

Put po valjku

Problem najkraćeg puta između dviju točaka zanimljiviji je ako je riječ o nekoj zakrivljenoj plohi. On je jednostavniji ako tu plohu možemo razgrnuti u ravninu tako da se pri toj deformaciji ne promijeni udaljenost točaka. To možemo učiniti primjerice s valjkastom (cilindričnom) i stožastom (konusnom) plohom. Rješavanje zadatka određivanja najkraćeg puta po ovim plohama vezat ćemo uz dva jednostavna geometrijska tijela, uspravni valjak i uspravni stožac.

Pri određivanju takvog puta po plaštu uspravnog valjka imamo dva posebna i jednostavna slučaja u kojima je lako uočiti rješenja.



Sl. 6.

Prvi je kad su točke A i B na istoj izvodnici. Tada je najkraća spojnica tih točaka dužina $\overline{AB}$ koja cijela pripada izvodnici na kojoj su i te dvije točke.

* * *

Drugi je pak poseban slučaj ako su točke C i D jednako visoko iznad osnovke valjka. Tada je njihova najkraća spojnica manji od dva luka kružnice koja je presjek plašta valjka ravninom koja prolazi točkama A i B i okomita je na os valjka.

Odaberimo sada točke M i N na plaštu uspravnog valjka tako da ne pripadaju istoj izvodnici ali i da ne budu jednako visoko iznad osnovke valjka.

Mogli bismo pomisliti kako je najkraća spojnica takvih dviju točaka manji luk neke elipse koja je presjek plašta valjka ravninom što prolazi točkama M i N.

No lako ćemo se uvjeriti da to nije istina ako načinimo sljedeći eksperiment:

Uzmemo običnu svijeću i namotamo oko nje list papira. Zatim označimo na papiru dvije točke M i N te oštrim nožem presječemo svijeću tom ravninom.

Zatim razgrnemo dijelove na koje smo razrezali papir. Iznenadit ćemo se kad vidimo da je presjek krivulja na kojoj su i naše točke M i N. Očito nismo odredili njihovu najkraću spojnicu.

Dobivena je krivulja sinusoida. Ovaj je eksperiment prikazan fotografijama u Panoptikumu.

* * *

No sjetimo se kako smo riješili zadatak određivanja najkraćeg puta na kocki. Jednako možemo postupiti i sada. Zamislimo da je plašt valjka od papira. Razrezat ćemo ga duž jedne njegove izvodnice i razgrnuti u ravninu. Sad ćemo točke povezati dužinom i plašt opet smotati u prvobitni položaj. Dobit ćemo na plaštu luk neke krivulje koja je najkraća spojnica točaka M i N. Ta je krivulja cilindrična spirala (zavojnica) ili **helikoida**.

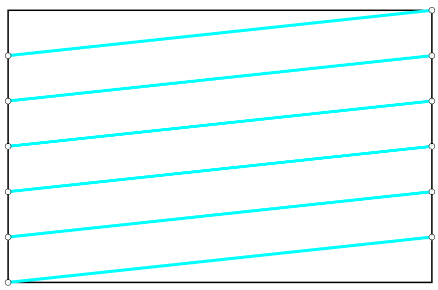
I ovdje možemo izvesti jedan vrlo lijep eksperiment.

Na pravokutnoj grafofoliji odaberimo dvije točke te ih povežimo dužinom. Zatim spojimo dvije suprotne stranice pravokutne folije. Što smo dobili vidimo u Panoptikumu.

* * *

Sigurno ste vidjeli vjevericu kako se uspinje po deblu. Jeste li pomislili kako se ona pritom kreće po zavojnici, najkraćim putem? Da li ste kada promatrali biljke penjačice, grah primjerice? I te biljke se motaju oko pruta po zavojnici. Zavojite stube primjer su zavojnice (vidimo fotografiju na naslovnici MŠ-a). Kako se rade požarne stube poput ovih na fotografiji? Pogledajmo i to na modelu za koji nam je potrebna grafofolija, jedan flomaster i ravnalo.

Požarne stube imaju za cilj pružiti ljudima sigurno napuštanje viših katova zgrade u slučaju požara ili neke druge nezgode. Stoga su one izdvojene, izvan su zgrade, Na svakom katu valja omogućiti pristup tim stubama.



Sl. 7.

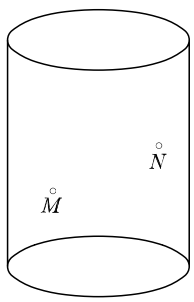
Uzmimo da je zgrada peterokatnica. Projekt požarnih stuba napravit ćemo na sljedeći način: Uzet ćemo i opet grafofoliju, podijelit ćemo njezine rubove na jednake dijelove i zatim nacrtati niz paralelnih dužina. Zatim ćemo spojiti dvije suprotne stranice pravokutnika tako da dobijemo plašt valjka. Na plaštu će se jasno vidjeti "požarne stube".

Muha i kap meda

Uz problem najkraćeg puta po plaštu valjka vezan je i sljedeći vrlo lijep zadatak američkog matematičara i popularizatora matematike Henryja Dudenyja:

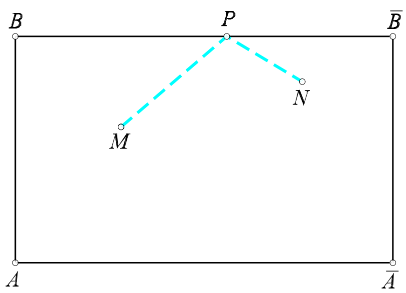
S vanjske strane čaše nalazi se muha, a s unutarnje kapljica meda. Ako je čaša oblika uspravnog valjka, koji je najkraći put kojim se mora kretati muha kako bi dospjela do kapi meda?

Pomislit ćemo, rješenje je očito. Muha će se kretati po luku zavojnice. Da, ali ona se mora "prebaciti" u nekoj točki ruba čaše na njezinu unutarnju stranu. Koja je to točka? Kako je odrediti da opisani put bude što kraći?



Sl. 8.

Zamislimo potpuno jednaku čašu ali od papira, pa je razrežimo duž jedne izvodnice i razgrnimo u ravninu. Tada naš zadatak glasi: Odrediti točku P na stranici $\overline{B\bar{B}}$ pravokutnika tako da put od M do N preko P bude najkraći moguć.



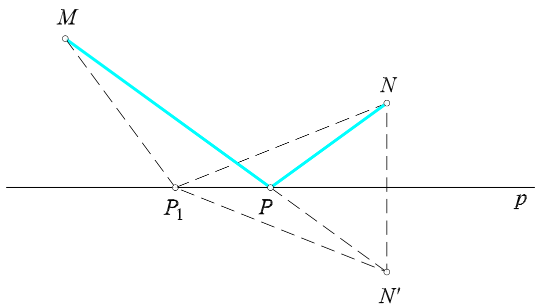
Sl. 9.

No to je jedan vrlo lijep zadatak, poznat kao zadatak o beduinu i devi. Beduin putuje na devi iz mjesta M u mjesto N a na tom putu on mora jednom svratiti do rijeke (do nekog mjesta P) kako bi napojio devu. Odredi na rijeci mjesto P tako da put iz M do N preko P bude najkraći.

Zadatak u svojem geometrijskom tumačenju glasi: Dane su dvije točke M i N s iste strane pravca p. Odredi na pravcu p točku P tako da zbroj udaljenosti $|MP| + |PN|$ bude najmanji.

Evo rješenja ovog zadatka:

Zrcalimo točku N prema pravcu p, dobit ćemo točku N'. Sjecište dužine $\overline{MN'}$ i pravca p tražena je točka P.

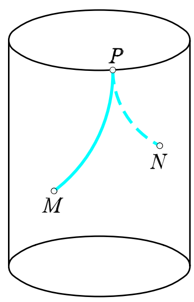


Sl. 10.

Uistinu, za svaku drugu točku P_1 pravca p bilo bi: $|MP_1|+|P_1N| = |MP_1|+|P_1N'| > |MN'| = |MP| + |PN'| = |MP| + |PN|$.

* * *

Isto ćemo napraviti i u našem zadatku s muhom i kapi meda. I ovdje se možemo poslužiti prozirnom folijom. Primijetit ćemo kako se muha penje po "desnovitoj", a spušta po "lijevovitoj" zavojnici (ili obrnuto).



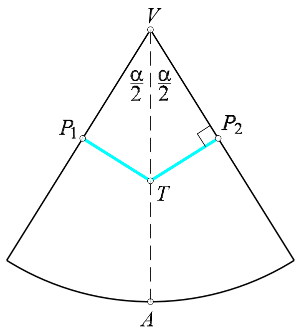
Sl. 11.

Najkraći put po plaštu stošca

Ako bi mrav obilazio plašt stošca tako da krene iz neke točke na plaštu i vrati se na to isto mjesto ali tako da pri kretanju prijeđe preko svih izvodnica stošca, kako bi takav put izgledao?

I plašt stošca možemo razviti u ravninu bez narušavanja udaljenosti točaka na njegovu plaštu. Trasa puta kakvog tražimo je jedna petlja s vrhom u polaznoj točki T.

Kad plašt uspravnog stošca razrežemo duž jedne njegove izvodnice i razgrnemo ga u ravninu, dobit ćemo kružni isječak. Ako je kut pri vrhu tog isječka manji od 180°, kako ćemo odrediti najkraći put koji kreće iz jedne točke na plaštu i koji se nakon obilaska tako da presiječe sve izvodnice, vraća u polaznu točku?

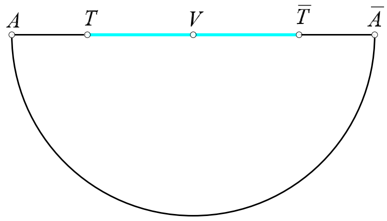


Sl. 12.

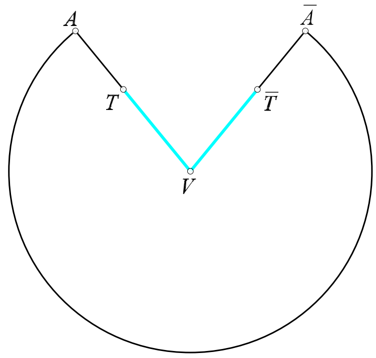
Rez ćemo izvesti duž izvodnice koja je "suprotna" izvodnici $\overline{VT}$.

Opisani put na tom isječku čine dvije sukladne dužine $\overline{TP_1}$ i $\overline{TP_2}$ okomite na izvodnicu. Da je svaki drugi put dulji, očigledno je. Kad spojimo isječak ponovno u plašt stošca, na tom ćemo plaštu vidjeti spomenutu petlju (vidjeti sliku u Panoptikumu).

Ako je pak kut pri vrhu kružnog isječka u mreži stošca jednak 180° (slika 13.), a pogotovo ako je veći (slika 14.), onda ta krivulja degenerira u dvije dužine, tj. najkraći put vodi iz dane točke do vrha po izvodnici te se po istoj izvodnici vraća natrag u točku.



Sl. 13.



Sl. 14.

Najkraći put po sferi

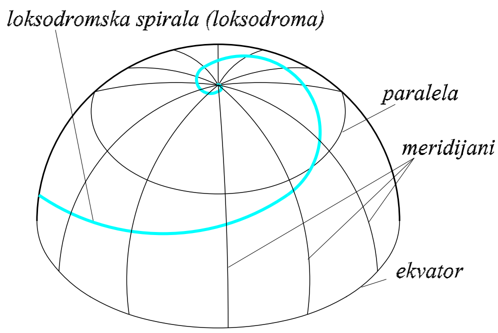
Pri određivanju najkraćeg puta između dviju točaka na valjkastoj ili na stožastoj plohi koristili smo se pogodnošću da te plohe možemo razviti, razgrnuti u ravninu bez promjene duljine linija koje cijele na njima leže. No postoje dakako i plohe kod kojih to nije moguće učiniti. Jedna je takva, primjerice, sfera.

Za svake dvije točke na sferi, koje nisu dijametralno suprotne, postoji jedinstvena kružnica koja ih povezuje a čije je središte u središtu sfere. Takva, "najveća", kružnica na sferi zove se **glavna kružnica sfere** ili **ortodroma.** Svaki je meridijan ortodroma. Ekvator je jedina paralela koja je ortodroma.

Dvjema točkama na sferi (koje nisu dijametralno suprotne) jednoznačno je određena ortodroma koja ih povezuje. Te dvije točke dijele ortodromu na dva luka, a najkraći je put između njih, manji od tih dvaju lukova.

Problem određivanja najkraćeg puta na sferi je vezan uz plovidbu po moru i zračni promet. Kreću li se brodovi ili zrakoplovi na svom putu između polazne točke i cilja po ortodromi? Ne uvijek. Ili točnije, uglavnom ne. Oni ne slijede najkraći put između tih dviju točaka. Najčešće se kreću po **loksodromi**, krivulji stalnog "kursa". Loksodroma presijeca sve meridijane pod istim kutom. Putovanje po loksodromi pojednostavljuje plovidbu, ali produljuje putovanje.

Ako projiciramo Zemljinu površinu iz Južnog pola na ravninu koja je dira u Sjevernom polu (stereografska projekcija), tada dobivamo kartu (slika 15.) koja kružnice na površini Zemlje preslikava u kružnice i čuva kutove. Na takvoj je karti slika ortodrome kružnica (veća od same ortodrome), a loksodroma logaritamska spirala. Ovo posljednje posljedica je činjenice da su meridijani na karti pravci koji se sijeku u polu, a loksodroma ih siječe pod jednakim kutovima.



Sl. 15.

Literatura

[1] Lyusternik, L. A., *The shortest lines, Variational Problems*, Mir Publishers, Moscow 1976.
[2] Steinhaus, H., *Mathematical Snapshots*, G. E. Stechert, New York, 1938.
[3] Dakić, B., *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.