Metoda uzastopnih približavanja

Zdravko Kurnik, Zagreb

U svakom području matematike postoji niz razrađenih i djelotvornih metoda rješavanja raznovrsnih problema. To znači da se velike skupine srodnih problema mogu obuhvatiti preciznim i sistematičkim planom rješavanja. Često se već iz same formulacije problema može naslutiti koju metodu treba odabrati. Ova činjenica, osim stručnog, ima i važno psihološko značenje: ako učenik rješava neki problem i brzo uoči da se on može riješiti metodom koju on poznaje, onda se smanjuje njegova početna psihička napetost, njegovo mišljenje manje je opterećeno i može se odmah usmjeriti na postupak rješavanja. Time se dodatno štedi i vrijeme. To posebno dolazi do izražaja na matematičkim natjecanjima. Naravno, nije moguće rješavati sve probleme određenim brojem poznatih metoda, jer se neprestano pojavljuju novi problemi koji zahtijevaju nove načine rješavanja. Međutim, poznavanje zadovoljavajućeg broja djelotvornih metoda omogućuje lakše savladavanje novih problema i pozitivno utječe na matematičke sposobnosti učenika i trajnost njihovih znanja. Zato je vrlo važno njegovati i razvijati metode koje učenici poznaju, te ih postupno upoznavati s novim metodama.

Naši učenici počinju se natjecati već u IV. razredu osnovne škole. To je najniža razina natjecanja. Izbor zadataka za njih nije jednostavan, jer njihovo predznanje nije veliko, a treba paziti i na psihološki faktor natjecanja učenika ove dobi. Dosadašnje iskustvo u tom pogledu je pozitivno. Četvrtoškolci su prihvatili natjecanja iz matematike kao nešto vrlo vrijedno, uzbudljivo, poticajno i korisno. Vesele se uspjesima, a žale zbog neuspjeha na isti način kao i stariji učenici. Slično se može reći i za petoškolce.

Postoje li metode rješavanja problema primjerene učenicima IV. i V. razreda? Teško je tu govoriti o problemima i metodama. Učenici ove dobi još ne uče **jednadžbe,** osnovno i djelotvorno sredstvo rješavanja velikog broja problema, pa se rješavanje nekog problema mora osmisliti drugačije. Ipak, postoji jedna metoda rješavanja problema primjerena učenicima ove dobi, koja uspješno zamjenjuje potrebu postavljanja jednadžbi. To je **metoda uzastopnih približavanja,** a poznata je i kao **metoda pokušaja i pogrešaka.**

Metoda se sastoji u nizu pokušaja da se dođe do rješenja postavljenog problema. U svakom od njih nastoji se ispraviti pogreška koja je nastala u prethodnom pokušaju. Pritom se, općenito, pogreška smanjuje i u svakom narednom pokušaju dolazi se sve bliže i bliže traženom rezultatu. Metoda se najčešće zorno predočuje pomoću tablice u koju se unose pokušaji.

Metoda je priprosta i obično se zanemaruje ili izbjegava. Međutim, učitelj bi trebao upoznati učenike s ovom metodom, posebno učitelj razredne nastave. Za stjecanje znanja o metodama rješavanja matematičkih problema, ova metoda je sasvim dobar i primjeren **početak.** Kasnije će učitelj matematike postupno upoznavati učenike s drugim i djelotvornijim metodama.

Opis metode uzastopnih približavanja počet ćemo jednim jednostavnim zadatkom s natjecanja.

Primjer 1. Na učeničkom izletu 32 učenika četvrtog razreda bilo je smješteno ovako, djevojčice u dvokrevetne, a dječaci u trokrevetne sobe. Za smještaj djevojčica upotrijebljena je jedna soba više nego za smještaj dječaka. Koliko je bilo djevojčica, a koliko dječaka?

(Županijsko natjecanje, 1999. g., IV. razred)

Rješenje. Prema uvjetima zadatka, broj soba dječaka ne može biti veći od 9. Taj broj ne može biti ni neparan, jer bi tada i broj dječaka i broj djevojčica bio neparan, a neparan broj djevojčica ne bi se mogao potpuno smjestiti u dvokrevetne sobe. Prema tome, broj soba dječaka je 2,4,6 ili 8. Sada je lako načiniti tablicu. Za stupce u njoj treba odabrati: *broj soba dječaka, broj soba djevojčica, broj dječaka, broj djevojčica i ukupan broj učenika.* Evo te tablice:

broj soba dječaka	broj soba djevojčica	broj dječaka	broj djevojčica	ukupno učenika
2	3	6	6	12
4	5	12	10	22
6	7	18	14	32
8	9	24	18	42

Treći slučaj je povoljan. Na izletu je bilo 18 dječaka i 14 djevojčica.

* * *

U prethodnom primjeru do rješenja došli smo nakon samo par pokušaja. To nije uvijek tako. Bolje razumijevanje metode dat će nam sljedeći, nešto složeniji zadatak.

Primjer 2. Na satu geometrije učenici su od štapića jednakih duljina slagali trokute i kvadrate. Upotrijebili su 300 štapića i složili 92 lika. Koliko je među njima bilo trokuta, a koliko kvadrata?

Rješenje. Rasuđivanje provodimo ovako:

najveći mogući broj trokuta je 92, a tada nema kvadrata. Najveći mogući broj kvadrata je 92, a tada nema trokuta. To su krajnji slučajevi. U prvom od njih broj stranica je 276, a u drugom 368. Kako je ukupan broj stranica likova u zadatku 300, učenici su složili određeni broj i trokuta i kvadrata.

Idući korak je srednji slučaj u kojem uzimamo da je i trokuta i kvadrata bilo po 46. U tom slučaju ukupan broj stranica je 322. To je previše. Budući da kvadrati više doprinose broju stranica, treba smanjivati broj kvadrata, a povećavati broj trokuta.

Sada počinjemo približavanje rješenju povećavanjem broja trokuta, recimo, za po 5, tj. sa 46 na 50, 55, 60, 65, 70. Istovremeno se broj kvadrata smanjuje sa 46 na 42, 37, 32, 27, 22. Ukupan broj stranica likova u tim slučajevima je 318, 313, 308, 303, 298.

Što nam kažu posljednja dva broja stranica? Kažu nam da je traženi broj trokuta između 65 i 70. Treba nastaviti približavanje rješenju unazad i promatrati 69, 68, 67, odnosno 66 trokuta. Odmah se vidi da sljedeća dva pokušaja vode do rješenja. Tablica:

broj trokuta	broj kvadrata	ukupan broj stranica
92	0	276
0	92	368
46	46	322
50	42	318
55	37	313
60	32	308
65	27	303
70	22	298
69	23	299
68	24	300

Od 300 štapića učenici su složili 68 trokuta i 24 kvadrata.

Primjer 3. Za gradnju vodovodne mreže duge 270 m upotrijebljene su 82 ravne cijevi. Neke su cijevi duge 5 m, a ostale 3 m. Koliko je upotrijebljeno kraćih, a koliko dužih cijevi (ako nisu rezane)?

(Regionalno natjecanje, 1993. g., IV. razred)

Rješenje. Ovaj se zadatak rješava na sličan način kao zadatak u prethodnom primjeru. U njemu ulogu trokuta igraju kraće cijevi, a kvadrata duže cijevi. Zato ćemo rješavanje skratiti. Postupak rješavanja i samo rješenje jasno se razaznaju iz ove tablice:

broj kraćih cijevi	broj dužih cijevi	duljina vodovoda u metrima
82	0	246
0	82	410
41	41	328
50	32	310
60	22	290
70	12	270
75	7	260

Za gradnju vodovodne mreže upotrijebljeno je 70 cijevi duljine 3 m i 12 cijevi duljine 5 m.

Primjer 4. Umnožak tri broja je 270. Koji su to brojevi ako se zna da je umnožak prvog i trećeg broja 30, a umnožak drugog i trećeg broja 135?

(Regionalno natjecanje, Zagreb, 1992. g., IV. razred)

Rješenje. Pokazalo se da zadatak za ovaj uzrast učenika nije jednostavan. Na natjecanju je sudjelovalo 50 učenika. Od toga broja samo je 5 učenika točno riješilo zadatak, 29 učenika riješilo je zadatak djelomično, a 16 učenika nije osvojilo ni jedan bod.

Da su učenici poznavali metodu uzastopnih približavanja, onda bi možda bili pripremljeni za ovakvo razmišljanje:

Umnožak tri broja je 270.

Umnožak prvog i trećeg je 30.

Umnožak drugog i trećeg je 135.

Koliki može biti prvi broj?

Ako je umnožak prvog i trećeg broja 30, onda prvi broj može biti 30, 15, 10, 6, 5, 3, 2 ili 1. Sada se načini tablica u kojoj su stupci: *prvi broj, drugi broj, treći broj* i *umnožak,* unesu moguće vrijednosti prvog broja u prvi stupac, iz uvjeta računaju treći i drugi broj, te promatraju umnošci svih triju brojeva. Evo te tablice:

prvi broj	drugi broj	treći broj	umnožak
30	135	1	4050
15	?	2	
10	45	3	1350
6	27	5	810
5	?	6	
3	?	10	
2	9	15	270
1	?	30	

Traženi brojevi su 2, 9 i 15.

Primijetimo da bi se mnogo brže došlo do rješenja da se u tablici počinje s najmanjom vrijednošću za prvi broj, tj. da se u prvi stupac upišu mogućnosti za prvi broj u obrnutom poretku: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Primjer 5. Na početku školske godine učenici petih razreda seoske škole počeli su skupljati novac za putovanje na more. Tijekom godine skupili su 14 925 kuna u novčanicama od 100 kuna i kovanicama od 25 kuna. Ukupan broj obje vrste novca je 216. Koliko je od toga novčanica, a koliko kovanica?

Rješenje. U tablicu ugrađujemo pet stupaca: *broj novčanica, broj kovanica, vrijednost novčanica, vrijednost kovanica, zbroj.*

Počinje se krajnjim slučajevima; 216 novčanica i 0 kovanica, odnosno 0 novčanica i 216 kovanica.

Slijedi srednji slučaj; 108 novčanica i 108 kovanica.

Sada se nastavlja povećavanjem jedne i smanjivanjem druge vrste novca i postepeno se približava rješenju. U tablici će se pokazati da se traženi broj novčanica nalazi između 120 i 130. Tablica:

broj novčanica	broj kovanica	vrijednost novčanica	vrijednost kovanica	zbroj
216	0	2 160	0	21 600
0	216	0	5 400	5 400
108	108	10 800	2 700	13 500
110	106	11 000	2 550	13 650
120	96	12 000	2 400	14 400
130	86	13 000	2 150	15 150
125	91	12 500	2 275	14 775
126	90	12 600	2 250	14 850
127	89	12 700	2 225	14 925

Štednja učenika sastoji se od 127 novčanica od 100 kuna i 89 kovanica od 25 kuna.

* * *

Metoda omogućuje dosta brzo rješavanje još složenijih problema. Završit ćemo jednim takvim problemom.

Primjer 6. Velika tvornica motornih vozila “Kotač” proizvela je posljednje godine 589 747 automobila i motocikla. Koliko je komada svake pojedine vrste vozila tvornica proizvela ako je ukupan broj kotača na svim vozilima 2 000 000?

Rješenje. Postupak rješavanja u kratkim crtama izgleda ovako: krajnji slučajevi, srednji ili blizak slučaj, smanjivanje intervala u kojem se nalazi rješenje i postupno približavanje rješenju. Na početku uzimamo povećanje broja automobila malo veće, recimo 25 000. Stupci tablice su: *broj automobila, broj motocikala, broj kotača automobila, broj kotača motocikala, ukupan broj kotača.* Tablica:

broj automobila	broj motocikala	broj kotača automobila	broj kotača motocikala	ukupan broj kotača
589 747	0	2 358 988	0	2 358 988
0	589 747	0	1 179 494	1 179 494
294 873	294 874	1 179 492	589 748	1 769 240
320 000	269 747	1 280 000	539 494	1 818 494
345 000	244 747	1 380 000	489 494	1 869 494
370 000	219 747	1 480 000	439 494	1 919 494
395 000	194 747	1 580 000	389 494	1 969 494
420 000	169 747	1 680 000	339 494	2 019 494

Iz tablice vidimo da se broj automobila nalazi između 395 000 i 420 000. Približavanje rješenju možemo nastaviti tako da u ovom kraćem intervalu broj automobila povećavamo za, recimo, 5 000. Tablica:

400 000	189 747	1 600 000	379 494	1 979 494
405 000	184 747	1 620 000	369 474	1 989 474
410 000	179 747	1 640 000	359 494	1 999 494
415 000	174 747	1 660 000	349 494	2 009 494

Iz tablice vidimo da se broj automobila nalazi između 410 000 i 415 000. Broju 2 000 000 bliži je broj 1 999 494. Razlika je samo 506 kotača. Zato treba nastaviti s još manjim povećavanjem, recimo, 250. Tablica:

410 250	179 497	1 641 000	358 994	1 999 994
410 251	179 496	1 641 004	358 992	1 999 996
410 252	179 495	1 641 008	358 990	1 999 998
410 253	179 494	1 641 012	358 988	2 000 000

* * *

Riješeni primjeri pokazuju da je metoda uzastopnih približavanja prilično **djelotvorna.** Posebno ako se uzme u obzir da učenici u trenutku njezine primjene još ne znaju postavljati i rješavati jednadžbe.

Važno pitanje metode je **tablica.** Učenike treba naučiti da brzo uoče koje veličine određuju stupce pri gradnji tablice.

Važna značajka metode je **procjena.** Učenici u svakom pokušaju promišljaju o granicama u kojima se nalazi rješenje problema i dolaze mu sve bliže. Njihovo mišljenje je vrlo aktivno. S vremenom će učenici steći iskustvo koje će im omogućiti bolju procjenu, smanjivanje broja pokušaja i brže rješavanje. Na učitelju je da im u tome primjereno pomogne.

Još malo zadataka s matematičkih natjecanja

1. Učenici nižih razreda jedne škole krenuli su na izlet u 11 autobusa od koji su neki imali 37, a drugi 29 sjedala. Koliko je bilo autobusa svake vrste ako je učenika bilo 351 i svi su autobusi bili popunjeni?

(Županijsko natjecanje, 1998. g., IV. razred)

2. 125 kg šećera stavljeno je u 40 vrećica od kojih neke sadrže 2 kg, a neke 5 kg. Koliko je bilo vrećica od 2 kg, a koliko od 5 kg?

(Regionalno natjecanje, Split, 1997. g., V. razred)

3. Razgovaraju dvije domaćice. Prva se hvali: “U svom dvorištu imam domaće životinje s ukupno 44 glave i 100 nogu.” Druga je upita: “Koliko imaš dvonožnih, a koliko četveronožnih životinja?” Na to prva odgovori: “Izračunaj sama!”

Pomozi drugoj domaćici odrediti broj dvonožnih i četveronožnih životinja u dvorištu.

(Županijsko natjecanje, 1996. g., IV. razred)

4. Na školskom natjecanju iz matematike Ivica je dobio 10 zadataka. Za svaki točno riješen zadatak dobiva 5 bodova, a za netočno riješen ili neriješen oduzimaju mu se 3 boda. Koliko je zadataka Ivica točno riješio ako je na kraju imao 26 bodova?

(Regionalno natjecanje, Osijek, 1996. g., IV. razred)

5. Škola je za odlazak svojih 708 učenika na jednodnevni izlet osigurala 15 autobusa, od kojih neki imaju 52 sjedala, a neki 43 sjedala. Koliko je bilo autobusa s 52 sjedala, a koliko s 43 sjedala, ako su sva mjesta bila popunjena?

(Regionalno natjecanje, Zagreb, 1996. g., IV. razred)

6. U jednoj auto–radionici u jednom mjesecu popravljena su 44 vozila, i to motocikli i automobili. Na svim tim vozilima bila su ukupno 144 kotača. Koliko je bilo motocikala, a koliko automobila?

(Županijsko natjecanje, 1995. g., IV. razred)

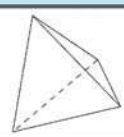
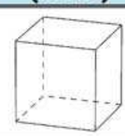
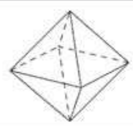
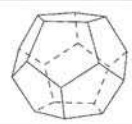
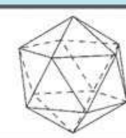
7. Na učeničkom "maturalcu" 60 učenika četvrtog razreda bilo je smješteno na sljedeći način: djevojčice u trokrevetne sobe, a dječaci u četverokrevetne sobe. Koliko je bilo dječaka, a koliko djevojčica ako je za dječake upotrijebljena jedna soba više nego za djevojčice?

(Regionalno natjecanje, Split, 1993. g., IV. razred)

8. Duljina kraka jednakokračnog trokuta je za 3 cm veća od duljine osnovice. Izračunajte duljine stranica trokuta, ako opseg trokuta iznosi 24 cm. Nacrtajte trokut!

(Općinsko natjecanje, 1993. g., IV. razred)

PRAVILNI POLIEDRI

Naziv	Tetraedar	Heksaedar (kocka)	Oktaedar	Dodekaedar	Ikosaedar
Crtež					
Broj strana i njihov oblik	*4 trokuta*	*6 kvadrata*	*8 trokuta*	*12 peterokuta*	*20 trokuta*
Broj bridova	*6*	*12*	*12*	*30*	*30*
Broj vrhova	*4*	*8*	*6*	*20*	*12*
Oplošje	$O=a^2\sqrt{3}$ $(\approx 1{,}7321\cdot a^2)$	$O=6a^2$	$O=2a^2\sqrt{3}$ $(\approx 3{,}4641\cdot a^2)$	$O=3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ $(\approx 20{,}6457\cdot a^2)$	$O=5a^2\sqrt{3}$ $(\approx 8{,}6603\cdot a^2)$
Volumen	$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ $(\approx 0{,}1179\cdot a^3)$	$V=a^3$	$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ $(\approx 0{,}4714\cdot a^3)$	$V=\frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$ $(\approx 7{,}6631\cdot a^3)$	$V=\frac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$ $(\approx 2{,}1817\cdot a^3)$
Polumjer opisane sfere	$R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$	$R=\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Polumjer upisane sfere	$r=\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$r=\frac{a}{2}$	$r=\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$r=\frac{a}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$
Kut između pobočki sa zajedničkim bridom	70°33'	90°	109°28'	116°34'	138°11'