Metoda supstitucije

Zdravko Kurnik, Zagreb

I. Problemi i metode

U svakom području matematike postoji niz razrađenih i djelotvornih metoda rješavanja raznovrsnih problema. To znači da se velike skupine srodnih problema mogu obuhvatiti preciznim i sistematičkim planom rješavanja. Često se već iz same formulacije problema može naslutiti koju metodu treba odabrati. Ova činjenica, osim stručnog, ima i važno psihološko značenje: ako učenik rješava neki problem i brzo uoči da se on može riješiti metodom koju on poznaje, onda se smanjuje njegova početna psihička napetost, njegovo mišljenje manje je opterećeno i može se odmah usmjeriti na postupak rješavanja. Time se dodatno štedi i vrijeme. To posebno dolazi do izražaja na matematičkim natjecanjima. Naravno, nije moguće sve probleme rješavati određenim brojem poznatih metoda, jer se neprestano pojavljuju novi problemi koji zahtijevaju nove načine rješavanja. Međutim, poznavanje zadovoljavajućeg broja djelotvornih metoda omogućuje lakše svladavanje novih problema i pozitivno utječe na matematičke sposobnosti učenika i trajnost njihovih znanja. Zato je vrlo važno njegovati i razvijati metode koje učenici poznaju, te ih postupno upoznavati s novim metodama.

Jedna od vrlo djelotvornih posebnih metoda rješavanja matematičkih problema jest *metoda supstitucije*.

> **Metoda supstitucije** *sastoji se u prijelazu s razmatranja jedne veličine na razmatranje druge veličine koja o prvoj prirodno ovisi. Na taj se način određeni matematički problem svodi ili na problem za kojega postoje razrađeni postupci rješavanja ili na problem koji je jednostavniji od polaznog.*

Važnost ove metode proizlazi i iz činjenice da ona nije usko vezana za jedno područje matematike, već je njezina primjena raznovrsna. Područja matematike u kojima se metoda vrlo često primjenjuje su:

funkcije, jednakosti, nejednakosti, jednadžbe, nejednadžbe, sustavi jednadžbi, algebarski izrazi, korijeni, potencije, integrali, derivacije i dr.

Pojednostavljenja koja se postižu primjenom te metode su:

eliminacija iracionalnosti, svođenje jednadžbe s racionalnim rješenjem na jednadžbu s cjelobrojnim rješenjem, svođenje jednadžbe višeg stupnja na kvadratnu jednadžbu, svođenje jednadžbe višeg stupnja na kvadratnu i linearnu jednadžbu, svođenje jednadžbe četvrtog stupnja na bikvadratnu jednadžbu, simetriziranje jednadžbe, svođenje iracionalne jednadžbe na sustav jednadžbi, svođenje sustava jednadžbi na jednostavnije sustave jednadžbi ili jednostavnije jednadžbe i dr.

Mnogi matematički problemi uspješno su riješeni zahvaljujući primjeni metode supstitucije. Evo samo nekih:

rješavanje algebarskih jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja, rastavljanje simetričnih polinoma na faktore, rješavanje simetričnih jednadžbi, rješavanje diferencijalnih jednadžbi, integriranje i dr.

Supstitucija se često prirodno nameće. Međutim, ima mnogo problema koji se mogu pojednostavniti i riješiti primjenom metode supstitucije, ali same supstitucije nije lako pronaći. Zato uspjeh u izboru odgovarajuće supstitucije bitno ovisi o osobinama rješavača kao što su iskustvo, intuicija, snalažljivost, dosjetljivost, umijeće pojednostavljenja problema i dr.

II. Metoda supstitucije u redovnoj nastavi

U nastavi matematike primjenjuje se niz metoda kojima se nastoji olakšati rješavanje matematičkih problema. Jedna od tih metoda je i metoda supstitucije. Pogledajmo nekoliko njezinih primjena.

Primjer 1. Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

Učenici se po prvi puta susreću s metodom supstitucije pri rješavanju sustava

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2.$$

Kao što znamo, jedna se nepoznanica izrazi pomoću druge iz jedne jednadžbe i dobiveni izraz uvrsti, **supstituira** u drugu jednadžbu. Dobiva se linearna jednadžba za drugu nepoznanicu.

Pojednostavljenje problema: rješavanje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama svodi se na rješavanje linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom.

Primjer 2. Bikvadratna jednadžba.

Bikvadratna jednadžba $ax^4+bx^2+c=0$ **supstitucijom** $x^2=y$ prevodi se u kvadratnu jednadžbu $ay^2+by+c=0$ pa se umjesto jednadžbe četvrtog stupnja rješavaju tri kvadratne jednadžbe, $ay^2+by+c=0$ (y_1, y_2), $x^2=y_1$, $x^2=y_2$.

Primjer 3. Simetrična jednadžba četvrtog stupnja.

To je jednadžba oblika $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$. Prvo se dijeljenjem s x^2 ona svodi na oblik

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$$

a onda **supstitucijom** $y=x+\dfrac{1}{x}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$ay^2+by+(c-2a)=0.$$

Prema tome, rješavanje simetrične jednadžbe četvrtog stupnja svodi se na rješavanje triju kvadratnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} ay^2+by+(c-2a)&=0 \quad (y_1, y_2),\\ x^2-y_1x+1&=0,\\ x^2-y_2x+1&=0. \end{aligned}$$

Primjer 4. Iracionalne jednadžbe.

Budući da se kod svake iracionalne jednadžbe nepoznanica nalazi pod znakom korijena, prva pomisao rješavača je eliminacija iracionalnosti potenciranjem obiju strana jednadžbe. No, u slučaju dvaju ili više korijena to nije uvijek izvedivo. Problem se često brže i uspješnije rješava primjenom metode supstitucije. Primjeri:

1) $2x - 4\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 15 = 0$

Supstitucija $x = u^3$ iracionalnu jednadžbu svodi na kubnu jednadžbu

$$2u^3 - 4u^2 - u - 15 = 0.$$

2) $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1}$
$= \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$

Dva kvadriranja daju jednadžbu četvrtog stupnja

$$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x = 0.$$

Supstitucija $x^2 + x + 1 = u^2$, $u > 0$ daje najprije jednostavniju iracionalnu jednadžbu $\sqrt{u^3 + 3} + u = \sqrt{2u^2 + 7}$, a onda dva kvadriranja daju bikvadratnu jednadžbu

$$u^4 + 3u^2 - 4 = 0.$$

3) $\sqrt[4]{x + 77} + \sqrt[4]{20 - x} = 5$

Supstitucija $x + 77 = u^4$, $20 - x = v^4$ svodi iracionalnu jednadžbu na sustav algebarskih jednadžbi za nove nepoznanice u i v:

$$u + v = 5, \quad u^4 + v^4 = 97.$$

Sustav se dalje relativno lako rješava svođenjem na kvadratne jednadžbe.

Primjer 5. Sustav linearne i kvadratne jednadžbe s dvjema nepoznanicama.

Sustav jednadžbi

$$ax + by + c = 0,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

rješava se sasvim analogno kao i sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Pomoću metode supstitucije problem se pojednostavljuje ovako: iz linearne jednadžbe izrazi se jedna nepoznanica pomoću druge i dobiveni izraz uvrsti u kvadratnu jednadžbu. Na taj način dobiva se kvadratna jednadžba za drugu nepoznanicu. Nastavak postupka je jasan.

Primjer 6. Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.

U ovom području primjenjuju se razne supstitucije. Vrlo često se **supstitucijom** $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ i odgovarajućim izrazima $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$ i $\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$ trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe svode na jednostavnije, algebarske.

Primjer 7. Metrički odnosi u trokutu.

Svi metrički elementi trokuta mogu se izraziti pomoću duljina a, b i c njegovih stranica. Međutim, za te duljine vrijede izvjesne relacije, što ponekad otežava analizu problema. Zato je za rješavanje metričkih odnosa u trokutu vrlo pogodna jedna posebna supstitucija. Relacije koje vrijede za duljine a, b i c stranica trokuta su nejednakosti trokuta $b + c > a$, $a + c > b$, $a + b > c$.

Pojednostavljenja izračunavanja i dokazivanja omogućuje **supstitucija**

$$x = b + c - a,$$
$$y = a + c - b,$$
$$z = a + b - c,$$

odnosno **supstitucija**

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{x+z}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}.$$

Na taj način duljine se a, b i c stranica trokuta, koje su pozitivni realni brojevi i za koje još treba uzeti u obzir nejednakosti trokuta, zamjenjuju veličinama x, y i z za koje treba znati samo da su pozitivni realni brojevi.

III. Zadaci s matematičkih natjecanja

U radu s naprednijim učenicima u dodatnoj nastavi i u pripremi tih učenika za natjecanja pružaju se velike mogućnosti upoznavanja s učinkovitosti metode supstitucije. Naime, na natjecanjima se često zadaju zadaci koji se najbrže rješavaju primjenom te metode. Pogledajmo jedan mali izbor takvih zadataka i pojednostavljenja koja se postižu tom primjenom.

1. Pojednostavljenje izraza

Ako su izrazi koji se razmatraju složeni i njihovo sređivanje zahtijeva malo više vremena, onda odmah na početku treba pomisliti na primjenu metode supstitucije, pogotovo ako se supstitucija prirodno nameće.

Zadatak 1. Dokažite da je za sve realne brojeve a, b, c sljedeći izraz nenegativan:

$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2- (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2).$$

Rješenje. Dokaz se može provesti neposredno, kvadriranjem, množenjem i sređivanjem. Međutim, za osnovnoškolce je kvadriranje i množenje u zadatku dosta složeno. Dokaz se brže provodi **supstitucijom**:

$$a^2+b^2+c^2=m, \quad bc+ca+ab=n.$$

Sada izraz poprima oblik $(m+n)^2-(m+2n)m=n^2=(bc+ca+ab)^2$, pa je on očito nenegativan.

Zadatak 2. Dan je izraz $M=(m^2+5m)(m^2+5m+10)+24$, gdje je m cijeli broj. Dokažite da se dani izraz može predstaviti kao produkt četiriju uzastopnih cijelih brojeva.

(Republičko takmičenje, BiH, 1988., 8. razred)

Rješenje. Oba faktora na desnoj strani imaju zajednički dio m^2+5m. Zato je prirodno uvođenje **supstitucije** $m^2+5m=n$. Sada izraz poprima pogodniji oblik

$$\begin{aligned} M&=n(n+10)+24=n^2+10n+24\\ &=(n+4)(n+6)\\ &=(m^2+5m+4)(m^2+5m+6). \end{aligned}$$

Ako se dalje uoči da je $m^2+5m+4=(m+1)(m+4)$, $m^2+5m+6=(m+2)(m+3)$, konačno se dobiva

$$M=(m+1)(m+2)(m+3)(m+4).$$

Zadatak 3. Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, dokažite da je $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$.

(Međunarodna matematička olimpijada, 1964.)

Rješenje. Ovdje se prirodno nameće **supstitucija** iz primjera 7. Njezinom primjenom nejednakost poprima oblik

$$\Big(\frac{y+z}{2}\Big)^2x+\Big(\frac{x+z}{2}\Big)^2y+\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2z \le 3\Big(\frac{y+z}{2}\Big)\Big(\frac{x+z}{2}\Big)\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

Sređivanjem se dobiva ekvivalentna nejednakost

$$xy^2+xz^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2-6xyz\ge 0.$$

Ovu nejednakost, a time i polaznu nejednakost, sada nije teško dokazati.

Njezina valjanost slijedi iz očigledne nejednakosti

$$x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\ge 0.$$

Naravno, jednakost vrijedi ako i samo ako je $x=y=z$, odnosno $a=b=c$.

2. Eliminacija iracionalnosti

Već smo u primjeru 4 rekli da se iracionalnost ponekad može eliminirati potenciranjem, a češće primjenom metode supstitucije.

Pogledajmo kako se ova druga mogućnost već pojavila u jednom zadatku na samom početku međunarodnog natjecanja srednjoškolaca.

Zadatak 4. Za koje realne brojeve x su istinite sljedeće jednakosti:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$,

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$,

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$?

(Međunarodna matematička olimpijada, 1959.)

Rješenje. Najprije se lako vidi da su zbog $(x-1)^2 \geq 0$, tj. $x^2 \geq 2x-1$, svi korijeni definirani za $x \geq \frac{1}{2}$. Uvodimo **supstituciju**

$$x+\sqrt{2x+1}=u^2, x-\sqrt{2x-1}=v^2.$$

Imamo redom

$$u^2+v^2=2x,$$
$$u^2v^2=x^2-2x+1=(x-1)^2,$$
$$uv=|x-1|,$$
$$(u+v)^2=2x+2|x-1|.$$

Sada nije teško odgovoriti na postavljeno pitanje:

a) $u+v=\sqrt{2}$ je za $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,

b) $u+v=1$ nije ni za jedan realan x,

c) $u+v=2$ je za $x=\frac{3}{2}$.

Zadatak 5. Dokažite da za svaka dva realna broja $a \geq 0$ i $b \geq 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4} \leq \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}.$$

(Državno natjecanje, 1998., 2. razred)

Na natjecanju su samo 4 učenika od njih 31 točno riješila zadatak, a čak 16 učenika nije osvojilo ni bod. Međutim, da su učenici poznavali metodu supstitucije, njezinom primjenom mogli su zadatak najprije pojednostavniti, što svakako nosi određene bodove, a onda možda i u potpunosti riješiti.

Rješenje. Koja je supstitucija gore bila povoljna? Veličine a i b treba zamijeniti dvjema novim veličinama, recimo u i v, tako da se u nejednakosti po mogućnosti odmah odstrane svi korijeni. S obzirom na lijevu stranu nejednakosti, a i b trebaju biti treće potencije, a s obzirom na desnu stranu, druge potencije novih veličina. To znači da šeste potencije omogućuju potrebnu eliminaciju.

Zaista, **supstitucijom** $a=u^6$, $b=v^6$, $u, v \geq 0$ odstranjuju se korijeni i nejednakost poprima oblik

$$\frac{u^6+u^4v^2+u^2v^4+v^6}{4} \leq \frac{u^6+u^3v^3+v^6}{3}.$$

Dakle, sada treba dokazati ovu jednostavniju nejednakost. Ona se najprije piše u obliku

$$u^6+v^6+4u^3v^3-3u^4v^2-3u^2v^4 \geq 0.$$

No, nije baš jednostavno pokazati da se daljim transformacijama gornja nejednakost može svesti na očitu nejednakost

$$(u-v)^2(u^4+2u^3v+2uv^3+v^4) \geq 0.$$

Ova nejednakost je početni korak dokaza polazne nejednakosti.

3. Svođenje jednadžbi višeg stupnja na jednostavnije jednadžbe i jednadžbe nižeg stupnja

Rješavanje jednadžbi ubraja se u najčešće postupke u nastavi matematike. Znamo da rješavanje algebarskih jednadžbi višeg stupnja od 2 izlazi iz okvira školske matematike, a posebno rješavanje općih jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja. No, neke posebne jednadžbe četvrtog stupnja, kao na primjer bikvadratna i simetrična, daju se riješiti školskim sredstvima. Zato je osnovni cilj mnogih primjena metode supstitucije svođenje algebarskih jednadžbi višeg stupnja na linearne, kvadratne i bikvadratne jednadžbe.

Zadatak 6. Riješite jednadžbu

$$(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35.$$

(Republičko natjecanje, 1985., 3. razred)

Rješenje. Ako se izvrše sve operacije i jednadžba sredi po potencijama nepoznanice x, dobiva se jednadžba četvrtog stupnja

$$108x^4+360x^3+447x^2+245x+15=0.$$

Iako postoje sredstva za rješavanje ove jednadžbe, to nije lako učiniti. Treba potražiti jednostavniji način.

Promotrimo umnožak drugog i trećeg faktora u jednadžbi. Imamo

$$(3x+2)(x+1) = 3x^2+5x+2$$
$$= \frac{36x^2+60x+24}{12} = \frac{(6x+5)^2-1}{12}.$$

Ovo je već bolje. Vidimo da se pomoću ove jednakosti jednadžba može zapisati ovako:

$$(6x+5)^2[(6x+5)^2-1]-420=0.$$

Prirodno se nameće **supstitucija** $(6x+5)^2=y$, na temelju nje dobivamo kvadratnu jednadžbu $y^2-y-420=0$ za novu veličinu y, s rješenjima $y_1=-21$, $y_2=20$, a zatim slijede dvije kvadratne jednadžbe za polaznu nepoznanicu x: $(6x+5)^2=-21$, $(6x+5)^2=20$. Postupak je jasan.

Zadatak 7. Riješite jednadžbu

$$\frac{1}{(2x+5)(3x-1)} = \frac{5}{4} - \frac{4}{x(6x+13)+10}.$$

(1991.)

Rješenje. Kod jednadžbi ovog oblika prva ideja koja se javlja jest da se jednadžba pomnoži zajedničkim nazivnikom i sredi po potencijama nepoznanice x. Ako to učinimo, nakon sređivanja dobivamo jednadžbu četvrtog stupnja

$$36x^4+156x^3+175x^2+13x-42=0.$$

Dalje bi trebalo analizirati ovu jednadžbu. To je teži način.

Potražimo drugu ideju. Nju nalazimo u izvjesnoj sličnosti nazivnika. Zadržimo pozornost na njima. Uočavamo da se oni mogu pisati $(2x+5)(3x-1)=6x^2+13x-5$, $x(6x+13)+10=6x^2+13x+10$, i da imaju zajednički dio $6x^2+13x$. To pruža dobru priliku uspješnog rješavanja. Prirodno se nameće **supstitucija** $6x^2+13x=u$. Jednadžba poprima oblik

$$\frac{1}{u-5} = \frac{5}{4} - \frac{4}{u+10},$$

odakle nakon množenja zajedničkim nazivnikom $4(u-5)(u+10)$ slijedi kvadratna jednadžba

$$u^2+u-42=0.$$

Rješavanje polazne jednadžbe svodi se na rješavanje triju kvadratnih jednadžbi

$$u^2+u-42=0, \qquad (u_1,u_2),$$
$$6x^2+13x=u_1,$$
$$6x^2+13x=u_2.$$

Zadatak 8. Riješite jednadžbu

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0.$$

Rješenje. Vidjeti [1], [4].

Zadatak 9. Nađite realna rješenja jednadžbe

$$(2x-1)^4+(2x+3)^4=1312.$$

Rješenje. Početak se čini jasnim. Na lijevoj strani treba izvršiti potenciranje pribrojnika i zatim jednadžbu srediti po potencijama nepoznanice x. No, na taj način dobiva se jednadžba četvrtog stupnja s cjelobrojnim koeficijentima

$$16x^4+32x^3+120x^2+104x-615=0.$$

I ona se može riješiti, ali uspješnost rješavanja ovisi o predznanju učenika i ima dosta poteškoća.

Postoji lakši način. Jednadžba četvrtog stupnja zadana je u posebnom zapisu. Kad bi taj zapis još bio oblika $(x+a)^4+(x-a)^4=b$, onda bi potenciranje odmah pomoglo. Potenciranjem se doduše opet dobiva jednadžba četvrtog stupnja, ali posebna, bikvadratna. To je znatno pojednostavljenje.

Kako u našem slučaju postići gornji željeni oblik jednadžbe? Odgovor nalazimo u **supstituciji**

$$2x-1=y-a,\ 2x+3=y+a.$$

Nova veličina je y, a broj a treba odrediti tako da te jednakosti vrijede. Oduzimanjem prve jednakosti od druge slijedi da je $a=2$. Polazna jednadžba supstitucijom najprije poprima oblik

$$(y-2)^4+(y+2)^4=1312,$$

odnosno

$$y^4+24y^2-640=0.$$

Sada nije teško naći realna rješenja polazne jednadžbe $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, a po potrebi i ostala dva, konjugirano kompleksna.

4. Svođenje trigonometrijske jednadžbe na algebarsku

Zadatak 10. Riješite jednadžbu:

$$\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-\frac{7}{2}.$$

(Općinsko natjecanje, 1993., 3. razred)

Rješenje. Prvi način. Trigonometrijska jednadžba pogodna je za neposrednu primjenu supstitucije iz primjera 6. Nakon sređivanja dobivamo algebarsku jednadžbu petog stupnja

$$3t^5+2t^4-8t^2-11t-2=0.$$

Malo duža analiza, primjena poučka o racionalnim rješenjima algebarske jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima i metode neodređenih koeficijenata vode na sljedeći rastav na faktore:

$$(t+1)(t^2+t+2)(3t^2-4t-1)=0.$$

Prvi faktor sigurno je različit od 0, a drugi faktor nema realnih nultočaka. Prema tome, rješavanje polazne trigonometrijske jednadžbe svodi se na rješavanje jedne kvadratne jednadžbe $3t^2-4t-1=0$ (t_1, t_2) i dviju vrlo jednostavnih trigonometrijskih jednadžbi $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t_1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t_2$.

Drugi način. Na temelju osnovnih veza među trigonometrijskim funkcijama, jednadžba se može napisati ovako:

$$\sin x+\cos x+\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=-\frac{7}{2},$$

odnosno

$$(\sin x+\cos x)\left(1+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)=-\frac{7}{2}-\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

Sada se uvodi **supstitucija** $\sin x\cos x=u$ $(|u|\le 1)$. Tada je $(\sin x+\cos x)^2=1+2u$. Kvadriranjem prethodne jednadžbe, uvrštavanjem supstitucije i sređivanjem dobiva se za veličinu u jednadžba trećeg stupnja

$$8u^3-29u^2-12u=0.$$

U očito mora biti različit od 0, pa se nakon kraćenja dobiva kvadratna jednadžba

$$8u^2-29u-12=0 \qquad \left(u_1=4,\ u_2=-\frac{3}{8}\right).$$

Prvo rješenje ne dolazi u obzir, a drugo vodi na rješavanje jednostavne jednadžbe $\sin x\cos x=-\frac{3}{8}$, odnosno $\sin 2x=-\frac{3}{4}$.

* * *

Nadamo se da su se čitatelji na temelju opisanih primjera i zadataka uvjerili u učinkovitost metode supstitucije. Za kraj još samo jedna mala napomena. Pregled zadataka s naših matematičkih natjecanja zadnjih 5 godina pokazuje da se pri rješavanju niza postavljenih zadataka mogla primijeniti metoda supstitucije. Zato bi na pripremama za natjecanja učenike svakako trebalo podrobnije upoznati i s ovom metodom.

Literatura

[1] I. L. Babinskaja, *Zadaci s ruskih matematičkih natjecanja* (prijevod s ruskog), EM 11, Element, Zagreb, 1999.

[2] M. Bombardelli, A. Dujella, S. Slijepčević, *Matematička natjecanja učenika srednjih škola*, MMB, HMD/Element, Zagreb 1996.

[3] A. Herceg, *Metoda supstitucije*, diplomski rad, Zagreb, 1998.

[4] Z. Kurnik, *Analiza*, Matematika i škola 2 (1999), 54-64.