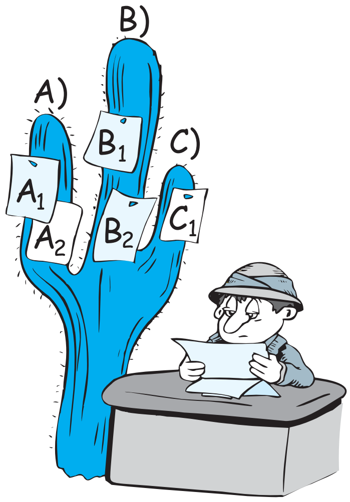

Metoda razlikovanja slučajeva

Zdravko Kurnik, Zagreb

U svakom području matematike postoji niz razrađenih i djelotvornih metoda rješavanja raznovrsnih problema. To znači da se velike skupine srodnih problema mogu obuhvatiti preciznim i sistematičnim planom rješavanja. Često se već iz same formulacije problema može naslutiti koju metodu treba odabrati. Ova činjenica, osim stručnog, ima i važno psihološko značenje: ako učenik rješava neki problem i brzo uoči da se on može riješiti metodom koju poznaje, onda se smanjuje njegova početna psihička napetost, njegovo mišljenje manje je opterećeno i može se odmah usmjeriti na postupak rješavanja. Time se dodatno štedi i vrijeme. To posebno dolazi do izražaja na matematičkim natjecanjima. Naravno, nije moguće sve probleme rješavati određenim brojem poznatih metoda, jer se neprestano pojavljuju novi problemi koji zahtijevaju nove načine rješavanja. Međutim, poznavanje zadovoljavajućeg broja djelotvornih metoda omogućuje lakše svladavanje novih problema i pozitivno utječe na matematičke sposobnosti učenika i trajnost njegovih znanja. Zato je vrlo važno njegovati i razvijati metode koje učenici poznaju, te ih postupno upoznavati s novim metodama.

* * *

Predmet razmatranja u ovom radu je jedna zaista djelotvorna posebna metoda rješavanja problema: **metoda razlikovanja slučajeva**. Ova metoda ima važnu ulogu u matematici i nastavi matematike zbog svoje osnovne značajke da se njezinom primjenom rješavanje nekog težeg problema svodi na rješavanje nekoliko jednostavnijih problema. Često se primjenjuje pri dokazivanju tvrdnji i pri rješavanju odredbenih zadataka u brojnim područjima matematike. Evo nekih od njih: jednadžbe, sustavi jednadžbi, funkcije, teorija brojeva, analitička geometrija, planimetrija.

Bît metode pri dokazivanju tvrdnji sastoji se u sljedećem:

1) Tvrdnja B treba se dokazati na temelju činjenice A.
2) Činjenica A razlaže se na slučajeve A_1, A_2, $\ldots$, A_k.
3) Tvrdnja B dokazuje se u svakom od tih slučajeva.
4) Valjanost tvrdnje B proizlazi na temelju dokazanih slučajeva.

Bît metode pri rješavanju odredbenih zadataka sastoji se u sljedećem:

1) Problem P treba riješiti u skupu S.
2) Skup S dijeli se na konačno mnogo disjunktnih podskupova $S_1, S_2, \ldots, S_k$ tako da je $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = S$.
3) Problem P rješava se u svakom od tih podskupova.
4) Skup rješenja problema P u skupu S jednak je uniji skupova rješenja problema P u podskupovima $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

U primjeni ove metode najčešće je najteži korak razlaganje činjenice A na slučajeve $A_1, A_2, \ldots, A_k$, odnosno razlaganje skupa S na podskupove $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Ne postoji precizno razrađen način razlaganja i zato se uspješnost u primjeni ove metode postiže rješavanjem problema, stjecanjem iskustva i postavljanjem određenih iskustvenih kriterija. Pritom se uvijek može pokušati s nekim poznatim i prirodnim razlaganjima. Tako na primjer, ako se radi o skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, jedno prirodno razlaganje toga skupa je razlaganje na parne i neparne prirodne brojeve, a drugo na proste i složene brojeve. Skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ prirodno se razlaže na negativne cijele brojeve, nulu i pozitivne cijele brojeve. Drugi način je razlaganje na skup parnih i skup neparnih cijelih brojeva. Skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbf{R}^+$ najčešće razlažemo na intervale $\langle 0, 1\rangle$ i $[1, \infty\rangle$, a skup svih realnih brojeva $\mathbf{R}$ na skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ i skup iracionalnih brojeva $\mathbf{I}$.

Najbolje je da na primjerima pokažemo kako se to praktički radi.

Metoda razlikovanja slučajeva može se primjenjivati vrlo rano. Evo zadatka iz jedne zbirke za naprednije učenike petog razreda osnovne škole koji se rješava tom metodom.

Primjer 1. Ako je p prost broj, je li $p-1$ prost ili složen broj?

Rješenje. Razlikujemo tri slučaja: $p = 2$, $p = 3$, $p > 3$.

1) $p = 2$. Tada je $p - 1 = 2 - 1 = 1$, a to nije ni prost ni složen broj.
2) $p = 3$. Tada je $p - 1 = 3 - 1 = 2$, dakle prost broj.
3) $p > 3$. Svaki prost broj veći od 3 je neparan, pa je $p - 1$ uvijek paran, dakle složen broj.

Ovo je lijep primjer logičkog rasuđivanja za ovaj uzrast učenika.

* * *

Pogledajmo sada dva problema koje treba riješiti u zadanom skupu, a skup se na prirodan način razlaže na dijelove i problemi se rješavaju u tim dijelovima.

Primjer 2. Ispitajmo ima li jednadžba $x^2 + y^2 = 1998$ rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje. Lako se vidi da su brojevi x, y iste parnosti. To nas odmah navodi da razlikujemo dva slučaja: x, y parni brojevi; x, y neparni brojevi. Skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ razlažemo, dakle, na parne i neparne brojeve. Prvi slučaj rješavamo u skupu parnih brojeva, a drugi u skupu neparnih brojeva. To je znatno pojednostavljenje problema.

1) x, y su parni brojevi. Za $x = 2m, y = 2n$ imamo $(2m)^2 + (2n)^2 = 1998$, odnosno $4m^2 + 4n^2 = 1998$. Lijeva strana je djeljiva sa 4, a desna nije. U ovom slučaju jednadžba nema rješenja.
2) x, y su neparni brojevi. Za $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$ iz $(2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 1998$ dobivamo $m^2 + m + n^2 + n = 499$. Ova se jednakost može pisati $m(m+1)+n(n+1) = 499$. Lijeva strana je zbroj parnih brojeva, dakle paran

broj, a desna je neparan broj. U ovom slučaju jednadžba nema rješenja.

* * *

Primjer 3. Odredimo sve prirodne brojeve n za koje je broj $2^n + 1$ djeljiv s 3.

Rješenje. Pojam djeljivosti ovdje nas upućuje na podjelu skupa prirodnih brojeva na parne i neparne brojeve. Razlikujemo dva slučaja: n je paran broj, n je neparan broj.

1) n je paran broj. Za $n = 2k$ imamo $2^n + 1 = 2^{2k} + 1 = 4^k + 1$. Broj 4^k pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1, a broj $4^k + 1$ ostatak 2. U ovom slučaju problem nema rješenja.
2) n je neparan broj. Za $n = 2k - 1$ imamo $2^n + 1 = 2^{2k-1} + 1$. Broj 2^{2k-1} pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2, a broj $2^{2k-1} + 1$ ostatak 0. U ovom su slučaju svi neparni prirodni brojevi rješenja problema.

* * *

Slijede dva primjera iz planimetrije.

Primjer 4. Pokažimo da između svih pravokutnika zadanog opsega najveću površinu ima kvadrat.

Dokaz. U drugom razredu srednje škole ova se tvrdnja obično dokazuje razmatranjem maksimuma kvadratne funkcije. Međutim, primjenom metode razlikovanja slučajeva ovu tvrdnju mogu dokazati i učenici osmog razreda osnovne škole.

Neka su a i b duljine stranica, a O opseg pravokutnika. Tada vrijedi $2a + 2b = O$, tj. $a + b = \frac{O}{2}$. Duljine stranica primaju vrijednosti iz otvorenog intervala $\left\langle 0, \frac{O}{2} \right\rangle$. Kolika može biti duljina stranice a? Razlikujemo tri slučaja: $O < a < \frac{O}{4}$, $a = \frac{O}{4}$, $\frac{O}{4} < a < \frac{O}{2}$.

1) Ako je $O < a < \frac{O}{4}$, postoji pozitivan broj x takav da je $a = \frac{O}{4} - x$, $b = \frac{O}{4} + x$. Tada je površina P pravokutnika
$$P = ab = \left(\frac{O}{4} - x\right)\left(\frac{O}{4} + x\right) = \frac{O^2}{16} - x^2.$$
2) Ako je $a = \frac{O}{4}$, tada je i $b = \frac{O}{4}$, pa je $P = \frac{O^2}{16}$.
3) Ako je $\frac{O}{4} < a < \frac{O}{2}$, postoji pozitivan broj x takav da je $a = \frac{O}{4} + x$, $b = \frac{O}{4} - x$. Tada je površina P pravokutnika
$$P = ab = \left(\frac{O}{4} + x\right)\left(\frac{O}{4} - x\right) = \frac{O^2}{16} - x^2.$$

Vidimo da je najveća površina u slučaju 2). Zaista, pravokutnik zadanog opsega O s najvećom površinom P jest kvadrat duljine stranice $a = \frac{O}{4}$.

* * *

Primjer 5. Neka su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta. Odredimo sve prirodne brojeve n za koje je $a^n + b^n < c^n$.

Rješenje. Ovdje se ne može učiniti ništa drugo nego početi s ispitivanjem slučajeva. Naravno, treba razmatrati početni dio skupa prirodnih brojeva.

1) $n = 1$. U ovom slučaju nejednakost $a^n + b^n < c^n$ poprima oblik $a + b < c$. S druge strane, za duljine stranica a, b, c vrijedi nejednakost trokuta $a + b > c$, što znači da $n = 1$ ne zadovoljava uvjet.
2) $n = 2$. U ovom slučaju nejednakost $a^n + b^n < c^n$ poprima oblik $a^2 + b^2 < c^2$. S druge strane, za duljine stranica a, b, c vrijedi Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$, što znači da ni $n = 2$ ne zadovoljava uvjet.
3) $n = 3$. Sada imamo $a^3 + b^3 = a^{3-2}a^2 + b^{3-2}b^2 < c^{3-2}a^2 + c^{3-2}b^2 = c^{3-2}(a^2 + b^2) = c^{3-2}c^2 = c^3$. Dakle, $n = 3$ zadovoljava uvjet.

Sasvim analogan izvod i zaključak imamo i za prirodne brojeve $4, 5, 6, \ldots, n, \ldots$, pa je konačan zaključak da traženi uvjet zadovoljavaju svi prirodni brojevi $n \geq 3$.

* * *

Naprednije učenike svakako treba upoznati s metodom razlikovanja slučajeva. Poznavanje te metode dalo bi daleko bolje rezultate pri rješavanju onih zadataka s matematičkih natjecanja koji su bili pogodni za njezinu primjenu. Ilustrirat ćemo to pomoću nekoliko primjera.

Primjer 6. *U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu*

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1.$$

(Državno natjecanje, 2000. g., I. razred)

Na natjecanju je samo jedan od 25 učenika potpuno riješio zadatak, a čak 19 učenika riješilo je manje od polovice zadatka, od toga 13 učenika mnogo manje.

Rješenje. Prema rezultatima se čini da je zadatak malo teži. Analizirajmo to podrobnije.

a) Povjerenstvo je zamislilo sljedeći postupak rješavanja:

Ako je $x \geq 3$ i $y \geq 3$, onda je $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z} \leq \frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{z} < 1$. To znači da mora vrijediti $x \leq 2$ ili $y \leq 2$. Na taj način razlikujemo četiri slučaja: $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$. Uvrštavanjem svake od ovih vrijednosti u polaznu jednadžbu, svaki put dobivamo jednostavniju jednadžbu i tražena rješenja se dosta brzo otkrivaju. Bitan dio postupka je početni korak i određivanje slučajeva. Taj korak većina učenika nije uočila.

b) Pogledajmo sada drugi način rješavanja, kojim svaki učenik može stići dosta daleko. Ako se povoljni slučajevi ne vide odmah, onda treba krenuti od svih slučajeva. Budući da se jednadžba rješava u skupu prirodnih brojeva, slučajevi su $x=1, 2, 3, \ldots$. Naravno, nije moguće razmotriti sve te slučajeve pojedinačno, ali treba početi na taj način, a redukcija na povoljne slučajeve očekuje se tijekom razmatranja. Napišimo najprije nakon množenja sa zajedničkim nazivnikom jednadžbu u obliku

$$yz+2xz-3xy=xyz.$$

Ovo je diofantska jednadžba trećeg reda s trima nepoznanicama. Prirodno je da se u svakom slučaju pomišlja na dvije najjednostavnije metode rješavanja takvih jednadžbi: metodu produkta i metodu kvocijenta.

1) $x=1$. Jednadžba poprima oblik $yz+2z-3y=yz$, odnosno $3y=2z$. Njezina rješenja su $y=2k$, $z=3k$, $k\in\mathbf{N}$. U ovom slučaju polazna jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja $(1, 2k, 3k)$ $k\in\mathbf{N}$.

2) $x=2$. Jednadžba poprima oblik $yz+4z-6y=2yz$, odnosno $yz+6y-4z=0$. Posljednja jednadžba može se pisati $(y-4)(z+6)=-24$. Očito prvi faktor na lijevoj strani mora biti negativan, pa je $y=1, 2, 3$. Tada je $z=2, 6, 18$. U ovom su slučaju rješenja polazne jednadžbe $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 6)$, $(2, 3, 18)$.

3) $x=3$. Jednadžba poprima oblik $yz+6z-9y=3yz$, odnosno $2yz+9y-6z=0$. Posljednja jednadžba može se pisati $(y-3)(2z+9)=-27$. Očito prvi faktor na lijevoj strani mora biti negativan. Jedini par prirodnih brojeva koji zadovoljava tu jednadžbu je $y=2$, $z=9$. U ovom je slučaju rješenje polazne jednadžbe $(3, 2, 9)$.

4) $x=4$. Jednadžba poprima oblik $yz+8z-12y=4yz$, odnosno $3yz+12y-8z=0$. Posljednja jednadžba može se pisati $(3y-8)(z+4)=-32$. Očito prvi faktor na lijevoj strani mora biti negativan. Jedini par koji zadovoljava tu jednadžbu je $y=2$, $z=12$. U ovom je slučaju rješenje polazne jednadžbe $(4, 2, 12)$.

Posljednja dva slučaja ukazuju na činjenicu da je za $x \geq 3$ uvijek $y=2$ i $z=3x$. Opravdajmo tu činjenicu.

5) $x \geq 3$. Polaznu jednadžbu sada pišemo u obliku $yz(x-1)+3xy-2xz=0$, odnosno $[(x-1)y-2x]\Big(z+\frac{3x}{x-1}\Big)=$

$-\dfrac{6x^2}{x-1}$. Prvi faktor i ovdje mora biti negativan, dakle $(x-1)y - 2x < 0$, tj. $y < \dfrac{2x}{x-1}$. Najveći broj na desnoj strani je 3. To znači da za sve $x \geq 3$ vrijedi $y < 3$, pa imamo dva slučaja; $y = 1$ i $y = 2$. Nova rješenja daje samo drugi slučaj. Za $y = 2$ polazna jednadžba poprima oblik $z = 3x$, pa lako zaključujemo da ona u ovom slučaju ima beskonačno mnogo rješenja $(k, 2, 3k)$, $k \geq 3$.

* * *

Primjer 7. Ako prirodni broj n nije djeljiv sa 4, dokažite da je zbroj $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ djeljiv s 5.

(Republičko natjecanje, 1991. g., I. razred)

Na natjecanju je samo 5 od 43 učenika uspješno riješilo zadatak, a čak 23 učenika nisu osvojila ni bod. Međutim, primjenom metode razlikovanja slučajeva ovaj se zadatak dosta lako rješava.

Rješenje. Kako su učenici trebali rasuđivati? Najprije, tvrdnja se odnosi na prirodne brojeve, ali iz razmatranja treba odstraniti prirodne brojeve djeljive sa 4. Oni su oblika $4k$, a svi zajedno čine skup $\{4k \mid k \in \mathbf{N}\}$. Prema tome, tvrdnja se odnosi na sve prirodne brojeve iz skupa $S = \mathbf{N} \setminus \{4k \mid k \in \mathbf{N}\}$. Ti brojevi pri dijeljenju sa 4 daju ostatke 1, 2 ili 3, pa su oblika $n = 4k+1$, $n = 4k+2$ i $n = 4k+3$. Oni tvore tri disjunktna podskupa $S_1 = \{4k+1 \mid k \in \mathbf{N}_0\}$, $S_2 = \{4k+2 \mid k \in \mathbf{N}_0\}$ i $S_3 = \{4k+3 \mid k \in \mathbf{N}_0\}$ skupa S i očito da zajedno daju čitav skup S. Tvrdnju trebamo dokazati u svakom od tih podskupova. To ćemo postići ispitivanjem posljednje znamenke svakog pribrojnika i samog zbroja.

Dakle, razlikujemo tri slučaja. Evo dokaza:

1) Za $n = 4k+1$ imamo $1^{4k+1} + 2^{4k+1} + 3^{4k+1} + 4^{4k+1} = 1 + 2 \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 3^{4k} + 4 \cdot 4^{4k} = 1 + 2 \cdot 16^k + 3 \cdot 81^k + 4 \cdot 256^k$. Prvi pribrojnik završava znamenkom 1, drugi s 2, treći s 3 i četvrti sa 4. Zbroj završava s 0, tj. zbroj je djeljiv s 5.
2) Za $n = 4k+2$ imamo $1^{4k+2} + 2^{4k+2} + 3^{4k+2} + 4^{4k+2} = 1 + 4 \cdot 16^k + 9 \cdot 81^k + 16 \cdot 256^k$. Prvi pribrojnik završava znamenkom 1, drugi sa 4, treći s 9 i četvrti znamenkom 6. Zbroj završava s 0, tj. zbroj je djeljiv s 5.
3) Za $n = 4k+3$ imamo $1^{4k+3} + 2^{4k+3} + 3^{4k+3} + 4^{4k+3} = 1 + 8 \cdot 16^k + 27 \cdot 81^k + 64 \cdot 256^k$. Prvi pribojnik završava znamenkom 1, drugi s 8, treći sa 7 i četvrti znamenkom 4. Zbroj završava s 0, tj. zbroj je djeljiv s 5.

Od naprednijih učenika moglo bi se očekivati da primijete da je posljednja znamenka zbroja u svim trima slučajevima 0, što znači da se tvrdnja zadatka može ovako pojačati:

Ako prirodni broj n nije djeljiv sa 4, dokažite da je zbroj $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ djeljiv s 10.

Ta je činjenica iskorištena na jednom kasnijem natjecanju:

Dokaži da je zbroj $1^{1998} + 2^{1998} + 3^{1998} + 4^{1998}$ djeljiv s 10.

(Županijsko natjecanje, 1998. g., VIII. razred)

Jasno je da je ovaj zadatak nastao specijalizacijom $n = 1998$ prethodnog zadatka. Na taj način dobiven je jednostavniji zadatak, primjeren uzrastu učenika.

* * *

Primjer 8. Dokažite da postoji jedinstveni trokut čije su duljine stranica uzastopni prirodni brojevi, a jedan od kutova dvaput veći od jednog od preostala dva kuta.

(Međunarodna matematička olimpijada, 1968. g.)

U šesteročlanoj ekipi države sudjelovala su dva učenika iz Hrvatske. Jedan je osvojio treću nagradu.

Rješenje. Neka je ABC trokut s duljinama stranica $a = n$, $b = n+1$, $c = n+2$ i kutovima α, 2α, $\pi - 3\alpha$ u određenom poretku. S obzirom da nasuprot većoj stranici leži veći kut, za kutove razlikujemo tri slučaja: $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = \pi - 3\alpha$; $\alpha, \beta = \pi - 3\alpha, \gamma = 2\alpha$; $\alpha = \pi - 3\beta, \beta, \gamma = 2\beta$.

Prije nego razmotrimo ta tri slučaja, za kutove $\alpha, 2\alpha, \pi - 3\alpha$ potreban nam je jedan identitet. Imamo redom

$$\begin{aligned}\sin(\pi - 3\alpha) &= \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)\\ &= \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\sin\alpha\sin(\pi - 3\alpha)\\ &\qquad = \sin^2 2\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1)\sin^2\alpha,\end{aligned}$$

$$\sin\alpha\sin(\pi - 3\alpha) = \sin^2 2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\frac{\sin(\pi - 3\alpha)}{\sin\alpha} = \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 1. \qquad (*)$$

1) $\alpha, \beta = 2\alpha, \gamma = \pi - 3\alpha$. Zamjenom kutova duljinama stranica, prema poučku o sinusima relacija $(*)$ poprima oblik
$$\frac{n+2}{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 1$$
ili
$$n^2 - 1 = 0.$$
Za pozitivnu vrijednost $n = 1$ dobivamo $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, a to znači da je trokut degeneriran. Problem nema rješenja.

2) $\alpha, \beta = \pi - 3\alpha, \gamma = 2\alpha$. Zamjenom kutova duljinama stranica, prema poučku o sinusima relacija $(*)$ poprima oblik
$$\frac{n+1}{n} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 - 1,$$
ili
$$n^2 - 3n - 4 = 0.$$
Za pozitivnu vrijednost $n = 4$ dobivamo $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. To je rješenje problema.

3) $\alpha = \pi - 3\beta, \beta, \gamma = 2\beta$. Zamjenom kutova duljinama stranica, prema poučku o sinusima relacija $(*)$ poprima oblik
$$\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 - 1$$
ili
$$n^2 - n - 3 = 0.$$
Jednadžba nema cjelobrojnih rješenja, pa ni problem nema rješenja.

Jedinstveno rješenje problema dobiveno je u slučaju 2).

* * *

Primjer 9. Riješimo u skupu prirodnih brojeva jednadžbu
$$17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0.$$

Rješenje. Na prvi pogled jednadžba je dosta složena. Međutim, pažljivijim gledanjem otkriva se da zagrade imaju nešto zajedničko. Naime, prva zagrada može se pisati u obliku $x(yzt + y + t) + (zt + 1)$, a jednadžba u obliku
$$\begin{aligned}17x(yzt + y + t) &+ 17(zt + 1)\\ &- 54(yzt + y + t) = 0,\end{aligned}$$
odnosno
$$(54 - 17x)(yzt + y + t) = 17(zt + 1).$$

Desna strana jednadžbe uvijek je pozitivna. Da bi i lijeva strana bila pozitivna, nužno mora vrijediti $x \le 3$. Sada primjenjujemo metodu razlikujući slučajeve $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

1) $x = 1$. U ovom slučaju imamo jednadžbu $37(yzt + y + t) = 17(zt + 1)$, odnosno $37t = (17 - 37y)(zt + 1)$. Budući da je lijeva strana uvijek pozitivna, a desna uvijek negativna, jednadžba nema rješenja.

2) $x = 2$. U ovom slučaju imamo jednadžbu $20(yzt + y + t) = 17(zt + 1)$, odnosno $20t = (17 - 20y)(zt + 1)$. Budući da je lijeva strana uvijek pozitivna, a desna uvijek negativna, jednadžba nema rješenja.

3) $x = 3$. U ovom slučaju imamo jednadžbu $3(yzt + y + t) = 17(zt + 1)$, odnosno $3t = (17 - 3y)(zt + 1)$. Uspoređujući faktore lako se vidi da mora vrijediti $y < 6$ i $17 - 3y < 3$, tj. $y = 5$. Iz posljednje jednakosti tada proizlazi $3t = 2(zt + 1)$, odnosno $t(3 - 2z) = 2$, pa je $z = 1$, $t = 2$.

Rješenje polazne jednadžbe je $x = 3$, $y = 5$, $z = 1$, $t = 2$.

* * *

Vjerujemo da su čitatelji na temelju riješenih primjera uočili značajke metode razlikovanja slučajeva i njezinu djelotvornost. Poznavanje svake metode je korisno, pa i metode razlikovanja slučajeva. Ono proširuje znanje i omogućuje bolje rezultate. Za bolju pripremu učenika za natjecanja na kraju dajemo jedan mali izbor zadataka koji se rješavaju ovom metodom.

Zadaci

Sljedeći zadaci i zadaci sličnog tipa mogu pomoći učenicima za bolje upoznavanje metode razlikovanja slučajeva i bolju pripremu za natjecanja.

1. Nađite sve prirodne brojeve m i n koji zadovoljavaju jednadžbu $10(m+n) = mn$.

(Državno natjecanje, 1998. g., I. razred)

2. Odredite sve proste brojeve p za koje su i brojevi **a)** $p+11$, $p+17$, **b)** $p+2$, $p+4$, $p+8$ također prosti.

3. Riješite u skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$.

(*Uputa.* Sve nepoznanice poprimaju vrijednosti veće od 1. Može se pretpostaviti da je $x \le y \le z \le t$. Tada je nužno $x \le 4$. Razlikuju se tri slučaja: $x = 2, 3, 4$. U svakom od tih slučajeva promatra se jednostavnija jednadžba i mogući slučajevi za druge nepoznanice. Zadatak ima 14 rješenja.)

4. Odredite sve proste brojeve p za koje je **a)** $2^p + p^2$, **b)** $3^p + p^3$ također prost broj.

(*Uputa.* Za proste brojeve veće od 3 treba rabiti njihov oblik $6k-1$ ili $6k+1$, $k \in \mathbf{N}$.)

5. Riješite u skupu cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ jednadžbu $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

(*Uputa.* Jednadžba se može pisati u obliku $(1+x)(1+x^2) = 2^y$, zaključuje se da su faktori na lijevoj strani potencije broja 2, $1 + x = 2^k$, $1 + x^2 = 2^{y-k}$, $k \in \mathbf{Z}$, za k se nalazi jednadžba $2^{y-k} + 2^{k+1} - 2^{2k} = 2$ i razlikuju slučajevi $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$.)

6. Ispitajte koji je najmanji prirodni broj n veći od 1 za koji je suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva kvadrat nekog prirodnog broja.

(*Uputa.* Polazi se od poznate formule $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Treba naći najmanji prirodni broj n veći od 1 za koji vrijedi $n(n+1)(2n+1) = 6m^2$, $m \in \mathbf{N}$. Treba razlikovati 6 slučajeva: $n = 6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$.)

Literatura

[1] Zdravko Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Zbornik radova stručno-metodičkog skupa, Rovinj 1999., 77–91.

[2] Zdravko Kurnik, *Suvremena metodika i nastava matematike*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, Zagreb 2000., 187–201.

Znanje je moć

Za znanje čovjek može zahvaliti ili sebi ili drugima, za svoje neznanje uvijek je kriv sam.

* * *

Novac uložen u obrazovanje daje najveće kamate.

* * *

Dobar je onaj učitelj koji uči od svojih učenika.

* * *

U raspravi s neznalicom najčešće strada zdravi razum.

Zdravko Kurnik