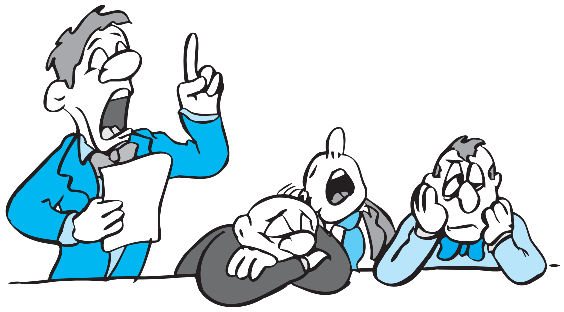
Cevin poučak i neke osobite točke trokuta

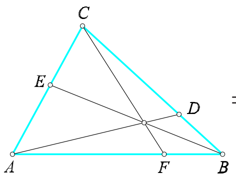


Branimir Dakić, Zagreb

Cevin poučak.[*] *Neka su D, E i F točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$. Pravci AD, BE i CF prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

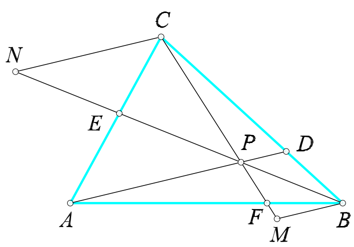
$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1.$$

Dokaz. Dokažimo najprije:



$$\Longrightarrow\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1.$$

Nacrtajmo trokut $\triangle ABC$ i odaberimo na njegovim stranicama točke D, E i F tako da pravci AD, BE i CF prolaze točkom P. Točkama B i C povucimo paralele s AD. Odredimo točke M i N kao sjecišta tih dviju paralela s pravcima CP, odnosno BP.



Tada možemo zaključiti:

$$\triangle AFP\sim\triangle FMB\Longrightarrow\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{|AP|}{|MB|},\tag{1}$$

$$\triangle NEC\sim\triangle APE\Longrightarrow\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{|CN|}{|AP|},\tag{2}$$

$$\triangle PDC\sim\triangle MBC\Longrightarrow\frac{|BC|}{|CD|}=\frac{|MB|}{|PD|}.$$

Posljednju jednakost možemo zapisati u obliku $|BC|=\dfrac{|MB|\cdot|CD|}{|PD|}$.

Nadalje, $\triangle PBD\sim\triangle NBC$, što povlači $\dfrac{|BD|}{|BC|}=\dfrac{|DP|}{|CN|}$, odnosno $|BC|=\dfrac{|BD|\cdot|CN|}{|DP|}$. Izjednačimo li $\dfrac{|MB|\cdot|CD|}{|PD|}=\dfrac{|BD|\cdot|CN|}{|DP|}$, dobit ćemo

$$\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|MB|}{|CN|}.\tag{3}$$

I sada pomnožimo jednakosti (1), (2) i (3) te imamo

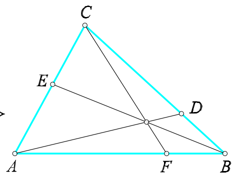
$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{|AP|}{|MB|}\cdot\frac{|MB|}{|CN|}\cdot\frac{|CN|}{|AP|}=1.$$

Time je dokaz dovršen.

[*] Giovanni Ceva, (1647. – 1734.), talijanski matematičar, *De lineis se invicem secantibus statica constructio*, Milano 1678.

A sada dokažimo obrnutu tvrdnju:

$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1 \Longrightarrow$$



Neka su D, E i F točke na stranicama $\overline{BC}, \overline{AC}$, odnosno $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$, i neka vrijedi:

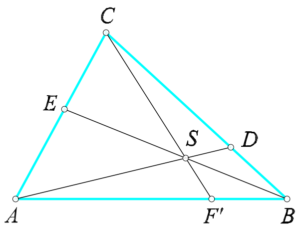
$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1.$$

Dokažimo da pravci AD, BE i CF tada prolaze jednom točkom u ravnini.

Sa S označimo sjecište pravaca AD i BE. Povucimo pravac CS i neka on u točki F' siječe stranicu $\overline{AB}$.

Kako pravci AD, BE i CF' prolaze točkom S, onda vrijedi

$$\frac{|AF'|}{|F'B|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1.$$



Izjednačimo

$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{|AF'|}{|F'B|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|},$$

te odatle dobijemo

$$\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{|AF'|}{|F'B|}.$$

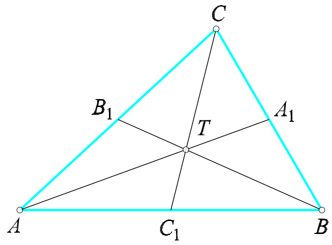
Zaključujemo: točke F i F' dijele dužinu $\overline{AB}$ u istom omjeru (od točke A), pa je zapravo riječ o istoj točki.

Time je dokazan i obrat poučka.

Pokažimo na nekoliko primjera kako se sada *Cevin poučak* može jednostavno primijeniti u dokazu nekih poučaka elementarne geometrije.

Poučak o težištu trokuta

Dokažimo da se težišnice trokuta, dužine koje spajaju vrhove trokuta i polovišta vrhovima suprotnih stranica, sijeku u jednoj točki. Ta se točka zove *težište trokuta*.



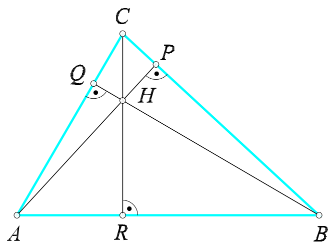
Kako su točke A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica trokuta, onda je $|AC_1| = |C_1B|$, $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, te je izravno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1.$$

Prema obratu Cevina poučka zaključujemo da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki.

Poučak o ortocentru trokuta

Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki koja se zove *ortocentar trokuta*.



Dokažimo primjenom *Cevina poučka i ovu činjenicu.*

Neka su točke P, Q i R nožišta visina trokuta. Zaključujemo:

$$\triangle BCQ \sim \triangle APC \quad \Longrightarrow \quad \frac{|CQ|}{|CP|}=\frac{|CB|}{|CA|},$$

$$\triangle CAR \sim \triangle BQA \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AR|}{|AQ|}=\frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\triangle ABP \sim \triangle BCR \quad \Longrightarrow \quad \frac{|BP|}{|BR|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

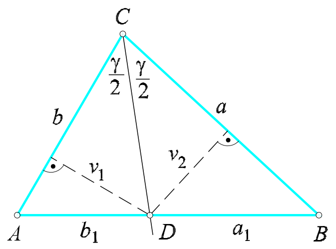
Pomnožimo li tri dobivene jednakosti, dobit ćemo $\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1$. Dakle, visine trokuta sijeku se u jednoj točki.

Poučak o simetralama kuta u trokutu

Simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.

I ovu činjenicu jednostavno je dokazati primjenom *Cevina poučka*. Pritom se koristimo poznatim *Poučkom o simetrali kuta trokuta* koji glasi:

Omjer dvaju dijelova na koje simetrala kuta trokuta siječe stranicu trokuta jednak je omjeru duljina odgovarajućih stranica trokuta nad tim segmentima.



Na slici je povučena simetrala CD kuta γ trokuta $\triangle ABC$, te je prema iskazanom poučku $a_1 : b_1 = a : b$.

Dokažimo ovaj važni poučak.

Postoji više jednostavnih dokaza od kojih je nižem uzrastu možda najbliži ovaj koji se koristi površinom trokuta. Uočimo:

$$P(\triangle ADC) = \frac{1}{2}bv_1 = \frac{1}{2}b_1v,$$

te imamo jednakost $bv_1 = b_1v$.

Analogno je $P(\triangle DBC) = \frac{1}{2}av_2 = \frac{1}{2}a_1v$, te vrijedi $av_2 = a_1v$.

Pritom je s v označena visina na stranicu $\overline{AB}$ trokuta.

Podijelimo li sada ove dvije jednakosti, dobit ćemo: $\frac{av_2}{bv_1} = \frac{a_1v}{b_1v}$. No, primijetimo da je $v_1 = v_2$. Naime, točka D je na simetrali kuta, a svaka je točka simetrale kuta jednako udaljena od krakova kuta.

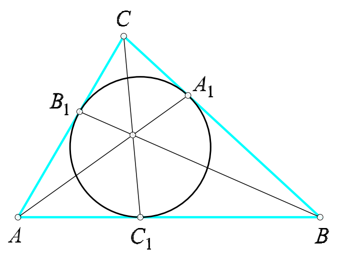
I tako smo dobili $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$, što smo i tvrdili.

Sada je sasvim jednostavno dokazati i početnu tvrdnju.

Gergonneova točka **

U svakom trokutu postoji još čitav niz osobitih točaka. O jednoj takvoj govori i sljedeći poučak:

Pravci koji spajaju vrhove trokuta i dirališta trokutu upisane kružnice na suprotnim stranicama, sijeku se u jednoj točki.



Primijenit ćemo jednostavno svojstvo tangente povučene na kružnicu iz neke točke izvan kružnice:

$|AC_1| = |AB_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$, $|CA_1| = |CB_1|$.

I sada izračunamo

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Time je poučak dokazan.

Literatura

[1] A. S. Posamantier, *Advanced Euclidean Geometry*, Key College Publishing, 2002.

[2] A. S. Posamantier, C. T. Salkind, *Challenging Problems in Geometry*, Dover Publications, New York, 1996.

[3] B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[4] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, (ruski prijevod) Nauka, Moskva, 1978.

[5] D. A. Brannan, M. F. Esplen, J. J. Gray, *Geometry*, University Press, Cambridge, 2002.

** Joseph-Diaz Gergonne (1771. –1859.), francuski matematičar