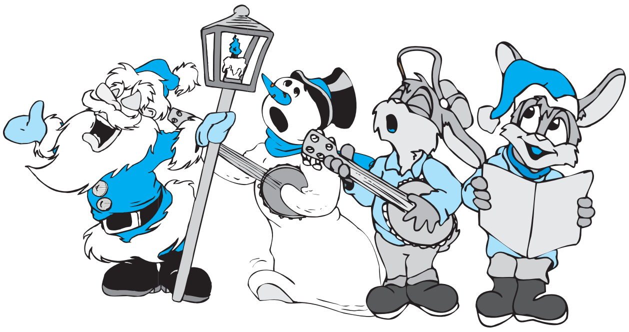
Grupni rad



Zdravko Kurnik, Zagreb

O diferenciranoj nastavi

Mnogi zahtjevi suvremene nastave matematike mogu se ostvariti primjerenim izborom nastavnih oblika i metoda. Među važnijima je zahtjev da se matematika treba dobrim dijelom naučiti na nastavnom satu. Preduvjet za to je bez sumnje aktivnost svih učenika. To nije uvijek lako postići, jer se učenici razlikuju svojim psihofizičkim osobinama, matematičkim sposobnostima i predznanjima. Jedan od načina da se postigne gore postavljeni cilj je primjena oblika nastave koji se naziva *diferencirana nastava*. Diferencirana nastava vodi računa o konkretnoj situaciji u razredu, uvažava razlike među učenicima i nastoji primjereno iskoristiti sposobnosti svakog pojedinog učenika. Postoje tri podoblika diferencirane nastave: *homogene grupe*, *grupni rad* i *individualni rad*.

U ovom članku opisat ćemo drugi podoblik zbog njegove djelotvornosti i posebne važnosti za unapređenje nastavnog procesa. Ali prije toga recimo par riječi i o prvom podobliku jer zbog sličnosti naziva prvog i drugog često dolazi do nerazumijevanja i nesklada pri njihovoj primjeni.

Homogene grupe su takav podoblik diferencirane nastave u kojem nastavnik *fiktivno* dijeli razred na grupe prema predznanju i matematičkim sposobnostima učenika. Obično se radi o trima grupama: grupa učenika s ocjenama 1 i 2, grupa učenika s ocjenom 3 i grupa učenika s ocjenama 4 i 5. Bitno je da pritom razred ostaje kolektiv u pravom smislu te riječi, a za grupe zna samo nastavnik. Tijekom nastavnog procesa nastavnik postavlja učenicima svake od navedenih grupa pitanja primjerena upravo njihovom predznanju. Budući da pri obradi nekog matematičkog sadržaja uvijek ima lakših i težih dijelova, moguće je na gotovo svakom nastavnom satu primijeniti rad s homogenim grupama, a to znači i aktivirati sve učenike. Zato je sasvim razumljivo da se u našoj nastavnoj praksi najčešće primjenjuje upravo ovaj oblik diferencirane nastave.

Grupni rad i njegove značajke

Grupni rad je vrlo star oblik nastave. Postojao je još prije uvođenja razredne nastave. Jedna od slabosti tradicionalne nastave matematike je upravo činjenica da se u njoj grupni rad vrlo rijetko primjenjuje. A grupni rad je izrazito djelotvoran način stjecanja znanja. Zapravo, grupni rad povezan s individualnim radom učenika daje u nastavnom procesu najbolje rezultate. Osim toga, taj oblik nastave ima i veliko odgojno značenje: navikava učenike na promjenu radnog ozračja, povećava njihovo samopouzdanje, razvija pojedinačne odgovornosti, pospješuje komunikaciju, navikava učenike da pružaju pomoć jedan drugom, produbljuje odnose među učenicima i dr.

Uspješnost primjene grupnog rada ovisi o nekoliko činilaca. Navedimo neke od njih: učestalost primjene, dobra priprema, kakvoća pisanih i drugih materijala, vrijeme koje je nastavnik matematike predvidio za izvođenje.

Načela organizacije i izvođenja grupnog rada:

1° Grupni rad znači podjelu razreda na grupe. Brojčani sastavi grupa mogu biti različiti. Praksa pokazuje da je ipak najdjelotvornije sastavljati grupe od 4-6 učenika. Sastave grupa nije dobro često mijenjati. Lakše je pratiti rad i napredovanje učenika u stalnim grupama.

2° Zadaci koji se daju grupama mogu biti isti ili različiti, ovisno karakteru nastavnog gradiva i obrazovnim ciljevima koji se žele ostvariti.

3° Grupe mogu imati homogen i nehomogen sastav učenika. Homogeni sastav znači da su u svakoj grupi učenici koji imaju podjednako predznanje. Ovakva podjela učenika na grupe može izazvati psihološke i odgojne probleme. Naime, ako su u nekoj grupi samo slabiji učenici i ako su im dani jednostavniji zadaci, oni se mogu osjećati zapostavljenima i manje vrijednima. To može rezultirati gubljenjem volje za rad. Zato je ipak bolji nehomogeni sastav grupa u kojima su predznanja učenika različita. Osim toga, u takvoj podjeli slabiji učenici u grupi dodatno uče od boljih.

4° U svakoj grupi bira se jedan učenik kao vođa grupe. Vođe grupa se mijenjaju na sljedećem satu grupnog rada. Vođu grupe nastavnik matematike najčešće određuje da podnese izvješće o radu čitave grupe.

5° Grupe trebaju raditi približno istim tempom. To omogućuje djelotvorno razmatranje matematičkog sadržaja.

6° Svaki član grupe rješava svoj dio postavljenog zadatka. Na taj način rad u grupama je individualiziran, pa je grupni rad zapravo objedinjenje individualnih radova svih članova grupe.

7° Važno pitanje u primjeni grupnog rada je kontrola rada učenika i povratna informacija. Kontrolu rada nastavnik provodi tijekom cijelog nastavnog sata. On postavlja grupi pitanja o temi koja se proučava. Rad uključuje i pitanja učenika, a poželjna je i suradnja grupa. Djelotvoran oblik kontrole grupnog rada su i izvješća učenika o radu pojedinih grupa i rasprava o tom radu. Kontrola individualnog rada članova grupe ostvaruje se u samoj grupi. Nastavnik objedinjuje rad svih grupa i nastoji postići jedinstvenu spoznajnu cjelinu.

8° Važno pitanje u primjeni grupnog rada je i ocjena rada učenika. Aktivnost učenika i uspješnost grupnog rada bit će to bolja što su učenici bolje upoznati s načinom na koji će nastavnik vrednovati njihov rad. A pred nastavnikom matematike stoji nekoliko mogućnosti da ocijeni izvršeni rad na primjeren način: ocjena cijelog nastavnog sata, ocjena rada svake grupe, ocjena učenika koji daju izvješća o radu svojih grupa, ocjena originalnog rješenja nekog problema, ocjena kratkog testa o proučenoj temi.

9° Grupni rad kao oblik nastave više je pogodan u nižim razredima, posebno pri rješavanju problema.

Primjena

Već smo napomenuli da se grupni rad rijetko primjenjuje. Jedan od razloga je svakako i činjenica da je taj oblik nastave vrlo zahtjevan. S druge strane, neki matematički sadržaji nisu prikladni za obradu primjenom grupnog rada. Međutim, budući da je matematika nastavni predmet u kojemu je rješavanje zadataka najčešća djelatnost učenika, tu nastavnik matematike ima veliku mogućnost češće primjene tog oblika nastave.

Za ilustraciju ćemo opisati primjenu grupnog rada u nekoliko nastavnih jedinica poglavlja SUSTAVI DVIJU LINEARNIH JEDNADŽBI S DVJEMA NEPOZNANICAMA.

Obrada poglavlja počinje uvođenjem pojma sustava. Taj pojam nastavnik može uvesti na tri načina.

Prvi način je neposredno davanje *definicije pojma*. To znači da se u tom slučaju mora definirati pojam općeg sustava, što prebrzo opterećuje mišljenje učenika i neprihvatljivo je za nastavu matematike u osnovnoj školi.

Drugi način je postavljanje *uvodnog primjera*. To je obično neki zadatak iz svakodnevnog života koji nastavnik sam objašnjava i tako nastoji da učenici što bolje shvate o kojem se matematičkom objektu radi.

Treći je način za razvoj mišljenja učenika najbolji. Sastoji se u postavljanju *uvodnog zadatka*. Uvodni zadatak rješavaju sami učenici. Pri rješavanju nekog takvog zadatka učenici pokazuju nesigurnost, muče se i najčešće ga ne znaju riješiti do kraja. Učenici su dovedeni u problemsku situaciju koja ukazuje na činjenicu da bez novih znanja promatrani problem nije moguće riješiti ili je njegovo rješavanje povezano sa znatnim teškoćama. Ovakva nastava je vrlo blizu problemskoj nastavi.

Primjer 1. Pojam sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

Grupe: Nastavnik dijeli razred na grupe. U ovom slučaju tri grupe A, B i C mogu biti redovi klupa. Potom učenici dobivaju predložak s istim zadacima i nastavnik daje kratko objašnjenje o cilju nastavne jedinice. Cilj je prevođenje tekstualnih zadataka na matematički jezik.

Predložak: (uzorak uvodnih zadataka.)

1) Danas je u obitelji Veselić veselo. Djed i unuk slave zajednički rođendan.

   – Zajedno imamo 91 godinu. Moj unuk ima isto toliko mjeseci koliko ja godina – objašnjava djed.

   Koji rođendan slavi djed, a koji unuk?

2) Ivica i Marica kupili su u knjižari bilježnice i olovke. Za 13 bilježnica i 6 olovaka Ivica je platio 99 kuna, a 11 bilježnica i 4 olovke Maricu su stajale 80 kuna. Kolika je cijena bilježnica, a kolika olovaka?

3) Dva dječaka, Jurica i Zvonko, sakupljaju sličice modela automobila. Upravo prebrojavaju svoje zbirke.

   – Ako mi daš svojih 12 sličica, ja ću imati četiri puta više nego ti – hvali se Jurica.

   – Bilo bi pravednije da ti meni daš 12 sličica, jer bi tada obojica imali isti broj – odgovorio je Zvonko.

   Nađite brojeve sličica koje imaju dječaci.

Komentar: cilj razmatranja ovih zadataka nije samo dobivanje rješenja. Ovo su tekstualni zadaci. Svaki takav zadatak sastoji se zapravo od dvaju zadataka: sastavljanja jednadžbi prevođenjem s običnog jezika na matematički jezik i rješavanja. Prvi od njih nije uvijek lagan, zahtijeva priličan umni napor i poznavanje postupka raščlanjivanja, ali je svođenje problema na rješavanje jednadžbi višestruko korisno. Omogućuje razvijanje logičkog mišljenja, dosjetljivosti, opažanja i umijeća samostalnog provođenja nevelikih istraživanja. Nas zanima upravo taj dio problema.

S takvim zadacima učenici su se susreli ranije pri rješavanju linearnih jednadžbi. Tekstualne zadatke s jednom nepoznatom veličinom i jednim uvjetom prevodili su na linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Ovdje se ide korak dalje. U gornjim zadacima pojavljuju se dvije nepoznate veličine i dva uvjeta. Pogledajmo na što se svodi njihovo rješavanje.

Uradak:

1a) Pitanje upućuje na dvije nepoznanice, broj djedovih godina i broj unukovih godina. Označimo te nepoznate brojeve sa x i y. Iz prvog dijela djedova objašnjenja slijedi da nepoznanice povezuje jednakost $x+y=91$. Ako unuk ima y godina, onda on ima $12y$ mjeseci, a to prema drugom dijelu djedova objašnjenja znači da je $x=12y$. Tako proizlazi da nepoznate veličine x i y zadovoljavaju dvije jednakosti:

$$\begin{aligned} x+y &= 91 \\ x &= 12y. \end{aligned}$$

2a) Pitanje upućuje na dvije nepoznanice, cijenu bilježnica i cijenu olovaka. Označimo te nepoznate veličine sa x i y. 13 bilježnica košta $13x$ kuna, a 6 olovaka $6y$ kuna, pa Ivičin trošak od 99 kuna može se zapisati u obliku jednakosti $13x+6y=99$. Slično za Maričin trošak od 80 kuna vrijedi jednakost $11x+4y=80$. Sada nepoznate veličine x i y zadovoljavaju dvije jednakosti:

$$\begin{aligned} 13x+6y &= 99 \\ 11x+4y &= 80. \end{aligned}$$

3a) Zahtjev na kraju zadatka upućuje na dvije nepoznanice, broj Juričinih sličica i broj Zvonkovih sličica. Označimo te nepoznate brojeve sa x i y. Prvi uvjet za nepoznate veličine nalazi se u rečenici koju izgovara Jurica. Kad bi Jurica dobio od Zvonka 12 sličica, on bi imao $x+12$ sličica, a Zvonku bi ostalo $y-12$ sličica. Jurica kaže da bi tada bilo $x+12=4(y-12)$. Drugi uvjet za nepoznate veličine nalazi se u rečenici koju izgovara Zvonko. Kad bi Zvonko dobio od Jurice 12 sličica, Jurici bi ostalo $x-12$ sličica, a Zvonko bi imao $y+12$ sličica. Zvonko kaže da bi tada bilo $x-12=y+12$. Sada nepoznate veličine x i y zadovoljavaju dvije jednakosti:

$$\begin{aligned} x+12 &= 4(y-12) \\ x-12 &= y+12. \end{aligned}$$

Ploča: po jedan predstavnik svake grupe pokazuje na ploči na što je njegova grupa svela rješavanje postavljenog uvodnog tekstualnog zadatka.

Zaključak: nastavnik objedinjuje rad svih grupa i izvodi zaključak. U ovom trenutku nije važno znaju li učenici naći vrijednosti nepoznanica x i y ili ne. Cilj je bio da se tekstualni zadaci prevedu na matematički jezik. Rezultati prevođenja su očito slični. Time su učenici stekli predodžbu o novom matematičkom objektu. To omogućuje nastavniku da definira novi pojam: *sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.*

* * *

Postoje tri metode rješavanja sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama: *metoda supstitucije*, *metoda suprotnih koeficijenata* i *metoda komparacije*. Nakon upoznavanja učenika s tim metodama nastavnik može jedan sat ponavljanja i utvrđivanja organizirati u obliku grupnog rada.

Primjer 2. Metode rješavanja.

Grupe: s obzirom da postoje tri metode rješavanja sustava, prirodno je da nastavnik podijeli razred u tri grupe A, B i C i da to opet budu redovi klupa. Sve tri grupe dobivaju iste zadatke. Pritom zadatak pod a) svaka grupa rješava drugom metodom, a zadatke pod b) svaka grupa rješava onom metodom za koju smatra da je za određeni zadatak najbolja.

<u>Predložak</u>: (uzorak zadataka.)

Riješite sustave linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama

a) $3x - 2y = 7$

$x + 3y = -5.$

b) $95x + 51y = -2$ $\quad$ $30x + 42y = -2$

$103x + 102y = 605,$ $\quad$ $84x + 56y = 1.$

<u>Uradak</u>:

a) (grupa A, metoda supstitucije) Iz druge jednadžbe izrazimo x pomoću y i dobiveni izraz uvrstimo u prvu jednadžbu. Dobivamo linearnu jednadžbu s nepoznanicom y. Cijeli postupak izgleda ovako:

$x = -3y - 5,$

$3(-3y - 5) - 2y = 7,$

$-9y - 15 - 2y = 7,$

$-11y = 22,$

$y = -2, x = -3y-5 = -3\cdot(-2)-5 = 1.$

Rješenje sustava je uređeni par $(x, y) = (1, -2)$. Provjera.

(grupa B, metoda suprotnih koeficijenata) Suprotne koeficijente najbrže dobivamo tako da drugu jednadžbu pomnožimo sa -3. Nakon toga jednadžbe zbrojimo. Dobivamo linearnu jednadžbu s nepoznanicom y. Cijeli postupak izgleda ovako:

$3x - 2y = 7$

$-3x - 9y = 15,$

$-11y = 22,$

$y = -2, x + 3 \cdot (-2) = -5, x = 1.$

Rješenje sustava je uređeni par $(x, y) = (1, -2)$. Provjera.

(grupa C, metoda komparacije) Iz obje jednadžbe izrazimo x pomoću y i dobivene izraze izjednačimo. Dobivamo linearnu jednadžbu s nepoznanicom y. Cijeli postupak izgleda ovako:

$x = \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}$

$x = -3y - 5,$

$\frac{2}{3}y + \frac{7}{3} = -3y - 5,$

$11y = -22,$

$y = -2, x = -3y-5 = -3\cdot(-2)-5 = 1.$

Rješenje sustava je uređeni par $(x, y) = (1, -2)$. Provjera.

b) Lako se uočava da za rješavanje navedenih sustava metoda supstitucije nije najprikladnija. Treba razmotriti druge dvije metode.

U prvom sustavu množenjem prve jednadžbe s -2 dobivamo suprotne koeficijente uz nepoznanicu y, pa se metodom suprotnih koeficijenata brzo pronalazi rješenje sustava $(x, y) = (-7, 13)$.

I drugi sustav je dosta složen, ali se može pojednostavniti ako se prva jednadžba podijeli s 3, a druga sa 4. Dobivamo ekvivalentan sustav

$$10x + 14y = -\frac{2}{3}$$
$$21x + 14y = \frac{1}{4}.$$

Sada se primjenom metode suprotnih koeficijenata (jedna se jednadžba pomnoži s -1) ili metode komparacije ($14y$ se iz obje jednadžbe izrazi pomoću x) brzo nalazi rješenje $(x, y) = \left(\frac{1}{12}, -\frac{3}{28}\right)$.

<u>Ploča</u>: nakon završenog rada predstavnici grupa na ploči pokazuju kako su došli do rješenja. Bilo bi dobro da se njihovi zapisi na ploči bitno ne razlikuju od gore navedenih. Prikaz i objašnjenje rješavanja nekog problema treba biti važan element nastavnikovog poučavanja.

<u>Komentar</u>: sustav u a) rješavali smo na tri različita načina i ti načini nisu se mnogo razlikovali po težini. To znači da je bilo gotovo svejedno koja se od triju metoda primjenjuje za njegovo rješavanje. Sa sustavima u b)

stvar stoji drugačije. Izbor metode pokazao se dosta važnim. Iako sve tri metode vode do rješenja, treba uvijek izabrati onu koja do njega vodi brže i djelotvornije.

* * *

Na sustave dviju linearne jednadžbi s dvjema nepoznanicama može se svesti rješavanje mnogih složenijih sustava jednadžbi, koje ne moraju biti ni linearne. Takvi sustavi pogodni su u srednjoj školi kao dodatni zadaci u redovnoj nastavi i kao zadaci za **grupni rad** učenika u dodatnoj nastavi. Pogledajmo jedan niz takvih sustava.

Primjer 3. Složeniji sustavi $(abc \neq 0)$.

$$y+z=a, \quad x+z=b, \quad x+y=b;$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c;$$

$$\frac{yz}{y+z}=\frac{1}{a}, \quad \frac{xz}{x+z}=\frac{1}{b}, \quad \frac{xy}{x+y}=\frac{1}{c};$$

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=a, \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=b, \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=c;$$

$$x^2z^2+x^2y^2=axyz, \quad y^2z^2+y^2x^2=bxyz,$$
$$z^2y^2+z^2x^2=cxyz.$$

Srodnost svih sustava nije baš velika, ali prava srodnost otkriva se tek pri njihovom barješavanju. Osim toga, svi sustavi mogu se riješiti na više načina pa to daje dodatnu mogućnost za različita promišljanja učenika u grupama.

Metodičke radionice

Posljednjih godina na stručnim skupovima i seminarima za nastavnike matematike uveden je poseban oblik rada: metodička radionica. Metodička radionica je oblik aktivnijeg sudjelovanja nastavnika matematike u vlastitom usavršavanju s većim naglaskom na metodičkim postavkama i zakonitostima putem rada u manjim grupama. Prema tome, rad u metodičkim radionicama je **grupni rad** koji je dodavanjem nekih novih postavki prilagođen nastavnicima matematike. U njemu se ostvaruju sljedeći ciljevi:

iznošenje vlastitog iskustva, slušanje drugih nastavnika i upoznavanje njihovih iskustava, razgovor o idejama i metodičkim pitanjima, razmjena ideja, zajedničko osmišljavanje problema i pitanja, osmišljavanje metodičkog pristupa rješavanja problema, djelotvorna rasprava o rezultatima samostalnog i zajedničkog rada, provjeravanje osobnog mišljenja, razvijanje sposobnosti prosuđivanja i zaključivanja, razvijanje sposobnosti matematičkog komuniciranja i dr.

Gotovo sva područja nastavnikove djelatnosti pogodna su za primjenu metodičkih radionica. Do sada su održane mnoge metodičke radionice. Navodimo samo neke:

Dokazivanje u nastavi matematike, Geometrijske konstrukcije, Likovi i tijela, Matematički pojmovi, Metode rješavanja diofantskih jednadžbi, Nejednakosti, Primjena računala u geometriji, Programirana nastava, Zadaci s više načina rješavanja.

Metodičko obrazovanje studenata nastavničkih profila danas se jednim dijelom bazira na radu u metodičkim radionicama. Na taj način studenti stječu dragocjeno iskustvo koje će im olakšati češću primjenu grupnog rada u budućoj nastavi matematike.

Literatura

[1] Z. Kurnik, *Analogija*, Matematika i škola 3 (2000), 101–109.
[2] Z. Kurnik, *Matematički zadatak*, Matematika i škola 7 (2000), 51–58.
[3] Z. Kurnik, *Metodička radionica*, Matematika i škola 16 (2002), 4–11.
[4] V. A. Oganesjan i dr., *Metodika prepodavanija matematiki v srednej škole*, Prosveščenie, Moskva 1980.