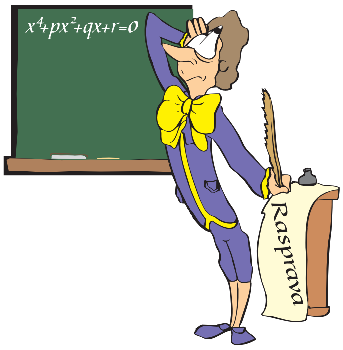

Metoda neodređenih koeficijenata

Zdravko Kurnik, Zagreb

Malo povijesti

Veliki francuski matematičar, fizičar i filozof *René Descartes* (1596. – 1650.) objavio je 1637. godine svoje remek-djelo "Rasprava o metodi pravilnog upravljanja umom i traženje istine u znanostima. Dioptrika. Meteori. Geometrija". Za povijest matematike "Geometrija" je posebno važan dio. U tom je dijelu po prvi puta opisana je **analitička metoda**. Otkrićem analitičke geometrije Descartes je stekao besmrtnu slavu.

Međutim, "Geometrija" sadrži mnogo više. Istaknut ćemo još jedan njezin važan sadržaj. U dijelu o izgradnji opće teorije rješavanja jednadžbi Descartes razmatra rješavanje jednadžbe četvrtog stupnja i uvodi novi postupak. Osnovno je pitanje može li se i kako polinom četvrtog stupnja napisati u obliku produkta polinoma manjeg stupnja. Jasno je da rješenje problema reducibilnost polinoma četvrtog stupnja rješava i problem reducibilnosti jednadžbe četvrtog stupnja.

Descartes problem reducibilnosti jednadžbe četvrtog stupnja svodi na reducibilnosti njezine kubne rezolvente. Evo kako. Ako je dana jednadžba četvrtog stupnja

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

ona se može napisati u obliku

$$\left(x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x^2 + yx - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\right) = 0,$$

pri čemu se pomoćna nepoznanica y određuje iz jednadžbe

$$y^6 + py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

Gornja jednadžba je očito kubna jednadžba za nepoznanicu y^2.

Descartes ne daje dokaz za svoju tvrdnju. Jasniju predodžbu o toj tvrdnji dobivamo iz jednog drugog izvora. Nizozemski matematičar *Frans van Schooten* (1615. – 1660.), profesor matematike u Leydenu, bio je gorljivi pristaša Descartesova učenja. S Descartesom se upoznao u Leydenu iste godine kada je tiskana "Geometrija". Imao je velik krug učenika. Tom krugu pripadao je i velikan znanosti *Christian Huygens* (1629. – 1695.). Širој matematičkoj javnosti postao je poznat 1646. godine objavljivanjem knjige "Matematički radovi Francoisa Vièteа" i prijevodom "Geometrije" na latinski jezik. Iz njegovih komentara u tom prijevodu može se izvući zaključak da je u Descartesovom izvodu primijenjena nova metoda – **metoda neodređenih koeficijenata**. Schooten je to potkrijepio vlastitim razmatranjima problema. On promatra jednadžbu četvrtog stupnja

$$x^4 - px^2 - qx + r = 0$$

i zapisuje je u obliku

$$(x^2 + yx + z)(x^2 - yx + v) = 0.$$

Ovdje su y, z i v neodređeni koeficijenti. Uspoređujući koeficijente uz istu potenciju nepoznanice x u oba oblika jednadžbe, za neodređene koeficijente dobiva se sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
&-y^2 + z + v = -p,\\
&-yz + yv = -q,\\
&zv = r,\\
&y^6 - 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.
\end{aligned}$$

Pretpostavlja se da je slično promišljao i Descartes.

O metodama

Iz razmatranja u prethodnom odjeljku vidljivo je da je Descartes otkrio i primjenjivao dvije važne metode: analitičku metodu i metodu neodređenih koeficijenata. Na taj način on je proširio krug problema koji se mogu rješavati poznatim metodama. Važnost takvog proširivanja ne bi trebalo posebno pojašnjavati. Ipak, evo kratkog objašnjenja.

U svakom području matematike postoji niz razrađenih i djelotvornih metoda rješavanja raznovrsnih problema. To znači da se velike skupine srodnih problema mogu obuhvatiti preciznim i sistematičkim planom rješavanja. Često se već iz same formulacije problema može naslutiti koju metodu treba odabrati. Ova činjenica, osim stručnog, ima i važno psihološko značenje: ako učenik rješava neki problem i brzo uoči da se on može riješiti metodom koju on poznaje, onda se smanjuje njegova početna psihička napetost, njegovo mišljenje manje je opterećeno i može se odmah usmjeriti na postupak rješavanja. Time se dodatno štedi i vrijeme. To posebno dolazi do izražaja na matematičkim natjecanjima. Naravno, nije moguće sve probleme rješavati određenim brojem poznatih metoda, jer se neprestano pojavljuju novi problemi koji zahtijevaju nove načine rješavanja. Međutim, poznavanje zadovoljavajućeg broja djelotvornih metoda omogućuje lakše svladavanje novih problema i pozitivno utječe na matematičke sposobnosti učenika i trajnost njihovih znanja. Zato je vrlo važno njegovati i razvijati metode koje učenici poznaju, te ih postupno upoznavati s novim metodama.

* * *

Opišimo ukratko metodu neodređenih koeficijenata. Metoda je vrlo raširena. Primjenjuje se za otkrivanje koeficijenata nekog izraza u slučaju kada je oblik tog izraza unaprijed poznat ili se naslućuje njegov određeni oblik. Tada se u naslućivani oblik izraza uvode neodređeni koeficijenti i iz dvaju oblika izraza uspoređivanjem dobiva sustav jednadžbi za neodređene koeficijente. U većini slučajeva takav sustav relativno se lako rješava. No, postoje i slučajevi kada je rješavanje takvih sustava vrlo složeno i metoda zakazuje. Odavde zaključujemo da je oblikovanje određenog izraza s neodređenim koeficijentima i otkrivanje tih koeficijenata samo prvi korak rješavanja zadanog problema, ali bez sumnje važan jer ima dvije bitne značajke: olakšavanje i pojednostavljivanje rješavanja.

Područja primjene: algebarski izrazi, funkcije, integrali, jednadžbe, jednakosti, nizovi, polinomi, racionalne funkcije i dr.

Primjena

Djelotvornost metode neodređenih koeficijenata najbolje ćemo spoznati opisom rješavanja raznovrsnih problema. Na početku ćemo ukratko navesti nekoliko standardnih primjena metode u području polinoma.

Primjer 1.

1) Odredimo nepotpuni kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^3 + x + 1$ polinomom $g(x) = x^2 + x + 1$.

Umjesto neposrednog dijeljenja zaključujemo ovako: kvocijent q i ostatak r očito su polinomi prvog stupnja. Zapisujemo ih s neodređenim koeficijentima A i B, odnosno C i D: $q(x) = Ax + B$, $r(x) = Cx + D$. Iz jednakosti

$$x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(Ax + B) + Cx + D$$

uspoređivanjem lako nalazimo prikaz

$$x^3 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1) + x + 2.$$

2) Odredimo koeficijente a i b tako da polinom $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ bude potpuni kvadrat.

Polinom g za kojega je $f = g^2$ je drugog stupnja s vodećim koeficijentom 1. Zapisujemo ga pomoću neodređenih koeficijenata A i B: $g(x) = x^2 + Ax + B$. Iz jednakosti

$$x^4 + x^3 - x^2 + ax + b = (x^2 + Ax + B)^2$$

uspoređivanjem i rješavanjem dobivenog sustava jednadžbi za nepoznanice a, b, A i B nalazimo prikaz

$$x^4 + x^3 - x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{25}{64} = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}\right)^2.$$

3) Razložimo polinom trećeg stupnja $f(x) = x^3 - 2x + 5$ po potencijama od $x + 3$.

Traži se zapravo zapis oblika $x^3 - 2x + 5 = A(x+3)^3 + B(x+3)^2 + C(x+3) + D$, gdje su A, B, C i D neodređeni koeficijenti. Uspoređivanjem i rješavanjem dobivenog sustava jednadžbi za koeficijente nalazimo prikaz

$$x^3 - 2x + 5 = (x+3)^3 - 9(x+3)^2 + 25(x+3) - 16.$$

* * *

Prelazimo na složenije probleme i probleme natjecateljskog karaktera.

Primjer 2. Pokažimo da se izraz $3x^2y^2 - x^2y + 3xy^2 - x^2 + 6y^2 - xy - x - 2y - 2$ može prikazati u obliku produkta dvaju izraza, od kojih prvi ovisi samo o x, a drugi samo o y.

Rješenje. Ako je navedeni prikaz moguć, onda prema izgledu zadanog izraza očito treba pretpostaviti da su faktori traženog produkta polinomi drugog stupnja od x, odnosno y, tj. da je traženi produkt oblika $(3x^2 + Ax + B)(y^2 + Cy + D)$. Nakon množenja faktora dobivamo $3x^2y^2 + 3Cx^2y + Axy^2 + 3Dx^2 + By^2 + ACxy + ADx + BCy + BD$.

Neodređene koeficijente A, B, C i D nalazimo uspoređivanjem polaznog izraza i produkta. Imamo redom

$$3C = -1,\ A = 3,\ 3D = -1,$$
$$B = 6,\ AC = -1,\ AD = -1,$$
$$BC = -2,\ BD = -2.$$

Iz prvih četiriju jednakosti nalazimo

$$A = 3,\ B = 6,\ C = -\frac{1}{3},\ D = -\frac{1}{3}.$$

Lako se vidi da ove vrijednosti zadovoljavaju i druge četiri jednakosti. Prema tome, traženi produkt glasi $(3x^2 + 3x + 6)(y^2 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3})$.

Iako polazni izraz izgleda dosta složen, sve je ispalo vrlo jednostavno. Primijetimo da se postupak izračunavanja neodređenih koeficijenata mogao još malo pojednostaviti. Naime, sve je moglo proći bez razlomaka da smo traženi produkt zamislili u obliku $(x^2 + Ax + B)(3y^2 + Cy + D)$. Tada bi svi neodređeni koeficijenti bili cjelobrojni i opisani postupak kao rezultat dao bi produkt $(x^2 + x + 2)(3y^2 - y - 1)$.

* * *

Primjer 3. Rastavimo izraz $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ na faktore.

Rješenje. Izraz izgleda prilično neprikladan za rastav na faktore. Kad bismo odmah izvršili potenciranje i primijenili metodu neodređenih koeficijenata, bio bi to dosta složen postupak. Naime, budući da je eksponent najviše potencije u izrazu 5, taj postupak morao bi predvidjeti da je traženi rastav sastavljen ili od pet linearnih faktora, ili od tri linearna i jednog kvadratnog, ili od jednog linearnog i dva kvadratna faktora.

Izabrat ćemo srednji put. U gradnji izraza ima izvjesne pravilnosti. Najprije treba to iskoristiti. Nije teško uočiti da se za $x=y$, $y=z$ i $z=x$ izraz poništava. To znači da su $x-y$, $y-z$ i $z-x$ faktori rastava. Preostali faktor je drugog stupnja u varijablama x, y, z i homogen je. Na njega ćemo primijeniti metodu neodređenih koeficijenata. Zbog simetrije taj faktor ima oblik $A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)$. Prema tome, možemo pisati

$$\begin{aligned}&(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=\\&=(x-y)(y-z)(z-x)[A(x^2+y^2+z^2)\\&\quad+B(xy+yz+zx)].\end{aligned}$$

Neodređene koeficijente A i B nećemo, zbog složenosti, određivati uspoređivanjem koeficijenata lijeve i desne strane, već bržim načinom.

Zadnja jednakost vrijedi za sve x, y i z, pa i za posebne trojke. Za $x=1, y=0, z=-1$ jednakost daje $2A-B=15$, a za $x=0$, $y=1, z=2$ slijedi $5A+2B=15$. Rješenje dobivenog sustava za neodređene koeficijente A i B je $A=5$, $B=-5$. Konačno imamo

$$\begin{aligned}&(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5\\&\quad=5(x-y)(y-z)(z-x)\cdot\\&\qquad\cdot(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).\end{aligned}$$

* * *

Primjer 4. Razložimo racionalnu funkciju $\dfrac{3x^2-1}{x(x^2-1)}$ na sumu prostih razlomaka.

Rješenje. Nazivnici razlomaka u rastavu očito su x, $x-1$, $x+1$. Pomoću neodređenih koeficijenata A, B i C možemo pisati

$$\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Nakon svođenja pribrojnika na desnoj strani na zajednički nazivnik, grupiranja članova i izjednačavanja brojnika dobivamo

$$(A+B+C)x^2+(B-C)x-A=3x^2-1.$$

Budući da ova jednakost mora vrijediti za sve x, za neodređene koeficijente odmah proizlazi sustav

$$A+B+C=3,\ B-C=0,\ A=1.$$

Rješenje sustava je $A=1$, $B=1$, $C=1$. Dakle,

$$\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}.$$

* * *

Slijedi jedan natjecateljski problem iz 1993. godine u kojem se prožimaju dvije jake metode: metoda supstitucije i metoda neodređenih koeficijenata. Primjena tih dviju metoda trebala bi učenicima trećeg razreda biti dosta uočljiva.

Primjer 5. Riješimo jednadžbu $\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=-\dfrac{7}{2}$.

Rješenje.

1) Na početku se prirodno nameće primjena standardne supstitucije $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ i odgovarajućih izraza $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg}x=\dfrac{2t}{1-t^2}$ i $\operatorname{ctg}x=\dfrac{1-t^2}{2t}$. Nakon sređivanja dobivamo algebarsku jednadžbu petog stupnja

$$3t^5+2t^4-8t^2-11t-2=0.$$

Time je metodom supstitucije uspješno proveden prvi korak: trigonometrijska jednadžba svedena je na algebarsku.

Prijeđimo na rješavanje dobivene jednadžbe. Visok stupanj jednadžbe može obeshrabriti učenike, ali natjecatelji ipak trebaju imati neke ideje.

2) Jedna od ideja je da se odmah pokuša provjeriti ima li jednadžba racionalnih rješenja. Treba se podsjetiti na poučak koji kaže: ako algebarska jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima ima racionalno rješenje $\frac{p}{q}$, onda p dijeli slobodni član, a q dijeli vodeći koeficijent jednadžbe. U našem slučaju treba biti $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$, $q \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Zadovoljava samo $p = -1$, $q = 1$, tj. cijeli broj -1 je rješenje jednadžbe. Ta činjenica vodi na rastav jednadžbe

$$(t+1)(3t^4 - t^3 + t^2 - 9t - 2) = 0.$$

Na taj način i drugi korak uspješno je proveden: rješavanje jednadžbe petog stupnja svedeno je na rješavanje jednadžbe četvrtog stupnja.

3) Treći korak je provođenje ideje da se jednadžba četvrtog stupnja reducira na kvadratne jednadžbe. To se postiže primjenom metode neodređenih koeficijenata. Pišemo

$$\begin{aligned} &3t^4 - t^3 + t^2 - 9t - 2 \\ &= (3t^2 + At + B)(t^2 + Ct + D) \\ &= 3t^4 + (A + 3C)t^3 + (AC + B + 3D)t^2 \\ &\qquad + (AD + BC)t + BD. \end{aligned}$$

Uspoređivanjem, za neodređene koeficijente A, B, C i D dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} A + 3C &= -1, \\ AC + B + 3D &= 1, \\ AD + BC &= -9, \\ BD &= -2. \end{aligned}$$

Lako se vidi da su koeficijenti cijeli brojevi. To znači da za uređeni par (B, D) imamo ove četiri mogućnosti: $(1, -2)$, $(-1, 2)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$. Zadovoljava samo par $(B, D) = (-1, 2)$. Tada je $(A, C) = (-4, 1)$. Traženi rastav je

$$3t^4 - t^3 + t^2 - 9t - 2 = (3t^2 - 4t - 1)(t^2 + t + 2).$$

4) Nakon triju koraka problem je sveden na poznate činjenice. Najprije imamo konačan rastav jednadžbe petog stupnja

$$(t+1)(3t^2 - 4t - 1)(t^2 + t + 2) = 0.$$

Prvi faktor je sigurno različit od 0, a treći faktor nema realnih nultočaka. Prema tome, rješavanje polazne trigonometrijske jednadžbe svodi se na rješavanje jedne kvadratne jednadžbe $3t^2 - 4t - 1 = 0$ (t_1, t_2) i dvije vrlo jednostavne trigonometrijske jednadžbe $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t_1$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t_2$. Provedite to.

* * *

Razmotrimo na kraju nekoliko primjera u kojima primjena metode neodređenih koeficijenata može doprinijeti razvoju stvaralačkog mišljenja učenika i njihovom uvođenju u stvaralački rad. Radi se o izračunavanju konačnih suma. U mnogim zbirkama zadaci iz ovog područja formuliraju se riječima “Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost. . . ”. Desna strana je zadana i traži se samo dokaz. U našim primjerima mi ćemo “zaboraviti” desne strane i poduzeti malo istraživanje zasnovano na različitim idejama. Dio suma mogu istraživati i učenici osnovne škole.

Primjer 6. Određivanje konačnih suma (k ide od 1 do n)

a) $\sum k$, $\sum(2k-1)$,

b) $\sum k^2$, $\sum(2k)^2$, $\sum(2k-1)^2$, $\sum k(k+1)$, $\sum k(3k+1)$, $\sum k(2k-1)$,

c) $\sum k^3$, $\sum(2k)^3$, $\sum(2k-1)^3$, $\sum k(k+1)^2$, $\sum k^2(k+1)$, $\sum k(k+1)(k+2)$,

d) $\sum k^4$,

e) $\sum k^5$.

Rješenje. U našem primjeru odabrano je nekoliko karakterističnih grupa suma. Postoji više načina kako doći do traženih jednakosti. Budući da se radi o većem broju suma, naša istraživanja nećemo moći provesti u potpunosti, već ćemo izdvojiti i istražiti samo neke. To će biti dovoljno za razumijevanje općeg postupka. Istraživanje:

1) U grupi a) očito su najjednostavnije sume.

Sumu prvih n prirodnih brojeva $\sum k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ učenici obično dobro poznaju. Za naše potrebe ovu sumu pisat ćemo u obliku $\sum k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

Suma $\sum(2k-1)$, kao i druge slične sume iz ove grupe, u kojima je opći pribrojnik prvog stupnja, može se odrediti razlaganjem na sumu suma. Tako je

$$\begin{aligned}\sum(2k-1) &= 2\sum k - \sum 1\\ &= 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.\end{aligned}$$

Učenicima osnovne škole možda je ovakav rad sa sumama previše apstraktan. Bolje je da njima pružimo mogućnost naslućivanja rezultata preko konkretnih primjera. Ovako: $1 = 1$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1+3+5 = 9 = 3^2$, $1+3+5+7 = 16 = 4^2$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ itd. Sada bi učenici mogli izreći opću tvrdnju:

Suma $\sum(2k-1)$ prvih n neparnih prirodnih brojeva jednaka je kvadratu broja n.

Uočimo: ako je opći pribrojnik u sumi prvog stupnja, desna strana je drugog stupnja.

2) U grupi b) nalazi se suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva i njoj srodne sume. Već ovdje mogli bi smo početi s primjenom metode neodređenih koeficijenata, ali to ćemo učiniti u slijedećem koraku korak dalje. Ovdje ćemo pretpostaviti poznavanje prve sume, kao i to da se ostale sume ove grupe lako izračunavaju svođenjem na sumu suma. Vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned}\sum k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,\\ \sum(2k)^2 &= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)\\ &= \frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n,\\ \sum(2k-1)^2 &= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)\\ &= \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n,\\ \sum k(k+1) &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\ &= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n,\\ \sum k(3k+1) &= n(n+1)^2 = n^3 + 2n^2 + n,\\ \sum k(2k-1) &= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)\\ &= \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n.\end{aligned}$$

Uočimo: ako je opći pribrojnik u sumi drugog stupnja, desna strana je trećeg stupnja.

3) Prijeđimo na grupu suma c). Kako odrediti sumu kubova prvih n prirodnih brojeva $\sum k^3$? Ovdje ćemo primijeniti novu ideju. Opći članovi suma u ovoj grupi su trećeg stupnja. Nije daleko pomisao da su desne strane, na temelju razmatranja prethodnih grupa, četvrtog stupnja. Ako je tako, sve se one mogu obuhvatiti **općim** zapisom $An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$ s neodređenim koeficijentima A, B, C, D, E. Za određenje tih koeficijenata potrebno je pet uvjeta. Njih dobivamo promatranjem konkretnih suma za $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Za sumu $\sum k^3$ tada dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}A + B + C + D + E &= 1,\\ 16A + 8B + 4C + 2D + E &= 9,\\ 81A + 27B + 9C + 3D + E &= 36,\\ 256A + 64B + 16C + 4D + E &= 100,\\ 625A + 125B + 25C + 5D + E &= 225.\end{aligned}$$

Postupnom eliminacijom koeficijenata, počevši od koeficijenta E, dobiva se da je rješenje gornjeg sustava $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = 0$, $E = 0$, pa je tražena suma

$$\sum k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Poželjno je još da se dobivena jednakost provjeri za $n = 6$. Zatim se jednakost dokazuje metodom matematičke indukcije. Ostale sume u ovoj grupi također se mogu odrediti primjenom metode neodređenih koeficijenata. I ovdje je brži način razlaganje na sumu suma i uporaba prethodnih rezultata. Na primjer;

$$\begin{aligned}\sum k(k+1)(k+2) &= \sum (k^3+3k^2+2k)\\ &= \sum k^3 + 3\sum k^2 + 2\sum k\\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &\quad + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).\end{aligned}$$

4) Razmatranja u grupama suma c), d) i e) provode se analogno.

* * *

U sljedećem primjeru također će biti vidljiva djelotvornost metode neodređenih koeficijenata.

Primjer 7. Određivanje konačnih suma (k ide od 1 do n)

a) $\sum \frac{1}{k(k+1)}$, $\sum \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$,

$\sum \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$,

b) $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$,

$\sum \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$,

c) $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.

Rješenje.

1) Pogledajmo prvu grupu suma. Opći članovi suma su slični. Za sve tri sume moguće je naslućivanje rezultata. Zaista,

$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$ itd.

$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{2}{5}$, $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{3}{7}$ itd.

$\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{2}{7}$, $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{3}{10}$ itd.

Iz niza konkretnih slučajeva lako se izvode opće tvrdnje

$$\sum \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$
$$\sum \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1},$$
$$\sum \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Jednakosti se mogu dokazati primjenom metode matematičke indukcije, ali i primjenom rastava na parcijalne razlomke. Rastav prvog općeg člana je očit:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Za drugi ćemo primijeniti metodu neodređenih koeficijenata. Imamo

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1} = \frac{(2A+2B)k + A - B}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Uspoređivanjem zaključujemo da je $2A + 2B = 0$, $A - B = 1$. Odavde je $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Prema tome je

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k+1)}.$$

Analogno se pokazuje da je

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3(3k-2)} - \frac{1}{3(3k+1)}.$$

Sada nije teško pokazati valjanost gornjih tvrdnji.

Uočimo: desne strane promatranih suma su kvocijenti linearnih izraza. Takve će biti desne strane i drugih suma koje pripadaju ovoj grupi. Sve se one mogu obuhvatiti **općim** zapisom $\frac{An+B}{Cn+D}$.

2) Istraživanja suma druge grupe počet ćemo određivanjem rastava općeg člana prve

sume na parcijalne razlomke. Primjenjujemo metodu neodređenih koeficijenata. Imamo

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}$$
$$=\frac{A(k+1)(k+2)+Bk(k+2)+Ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(A+B+C)k^2+(3A+2B+C)k+2A}{k(k+1)(k+2)}.$$

Uspoređivanjem, za koeficijente dobivamo sustav jednadžbi $A+B+C=0$, $3A+2B+C=0$, $2A=1$. Rješenje ovog sustava je $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$, $C=\frac{1}{2}$. Traženi rastav glasi

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}.$$

Na temelju ovog rastava možemo naći da je

$$\sum\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Uočimo: desna strana sume je kvocijent kvadratnih izraza. Možemo pretpostaviti da će desne strane svih suma koje pripadaju ovoj grupi biti takvog oblika, dakle i druga gore navedena suma. Sve se one mogu obuhvatiti **općim** zapisom $\frac{An^2+Bn+C}{Dn^2+En+F}$ s neodređenim koeficijentima A, B, C, D, E i F. Za određenje tih koeficijenata potrebno je šest uvjeta. Njih dobivamo promatranjem konkretnih suma za $n=1,2,3,4,5,6$.

Zbog dužine postupka ispuštamo detalje računanja koeficijenata za drugu sumu. Navodimo samo rješenje sustava: $A=1, B=1$, $C=0$, $D=8$, $E=16$, $F=6$. Dakle;

$$\sum\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

3) U trećoj je grupi samo jedna suma. Vidimo da nju i sve slične sume karakterizira nazivnik u kojem je sada produkt sa četiri faktora. Čitateljima prepuštamo da na temelju prethodnih razmatranja izvedu potreban zaključak o obliku desne strane takvih suma. Navodimo samo da rezultat treba biti

$$\sum\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

* * *

Toliko o metodi neodređenih koeficijenata. Bilo bi poželjno da čitatelji sa svojim učenicima provedu potpuniju analizu problema u ovom članku i dovrše "istraživanje". Članak nije mogao obuhvatiti i primjenu metode neodređenih koeficijenata u nekim ranije navedenim područjima, pa je ostalo dosta prostora za rad i u tom smjeru. Sve to bilo bi korisno i zato što na taj način učenici, uz **metodu neodređenih koeficijenata**, bolje upoznaju i neke druge važne metode kao što su **analiza**, **indukcija**, **generalizacija**, **metoda matematičke indukcije**, **metoda supstitucije**. Time stječu jače samopouzdanje za eventualno sudjelovanje na matematičkim natjecanjima.

Literatura

[1] Z. Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Zbornik radova stručno-metodičkog skupa, Rovinj 1999, 77–91.

[2] Z. Kurnik, *René Descartes*, Matematika i škola 6 (2000), 26–29.

[3] Z. Kurnik, *Metoda supstitucije*, Matematika i škola 20 (2003), 196–202.

[4] A. Marić, *Konačni zbrojevi*, Element, Zagreb 1998.